

π en el periodo babilónico

Iván Arribas (ivan.arribas@uv.es)

INTRODUCCIÓN

El número π siempre me ha producido una mezcla de sensaciones, entre fascinación, sorpresa, misterio. Define una de las relaciones más simples posibles de la geometría, el cociente entre la longitud y el diámetro de un círculo pero resulta imposible de expresar numéricamente.

Esta inquietud me llevó a preguntarme cómo se fueron acercando las antiguas culturas a su concepto: ¿cuándo aparece la constante π como el enlace entre los elementos de un círculo? ¿en que momento se observa que esa misma constante también relaciona el área con el radio al cuadrado? ¿cuáles fueron las aproximaciones de π que usaban los antiguos matemáticos?

Este artículo responde a estas preguntas para el imperio babilónico, heredero de aquellos pueblos que desarrollaron por primera vez y de forma simultánea la escritura y los números. Su concepto del círculo distaba mucho del nuestro. Para ellos aun no existían *la contante* del círculo sino *las constantes*, una por cada relación entre elementos del círculo que necesitaban. Estas constantes llevan implícita una aproximación de π que hoy vemos muy burda pero que resultaba satisfactoria para sus cálculos.

Este trabajo es el primero de una colección que abordará las mismas cuestiones para otras culturas hasta llegar a la conceptualización actual del círculo.

Este trabajo refleja mis propias limitaciones intelectuales, y aunque intento entender las matemáticas de tantas culturas antiguas como me es posible, es difícil ser solvente en todas ellas. El trabajo refleja mis intereses, mis puntos fuertes y mis punto débiles. No es una disertación académica ni exhaustiva, sino una obra de lectura, no de consulta, pero no renuncia al rigor que se echa en falta en otras obras divulgativas. Está dirigida a toda persona interesada por la evolución del concepto de π y que quiere profundizar en su conocimiento escapando de los tópicos usuales. No pretendo condensar todo el conocimiento matemático de una periodo de más de

tres mil años, sólo aquel directamente relacionado con mis intereses. Soy responsable de cualquier error o mala interpretación.

El trabajo empieza con una breve reseña histórica del origen de la escritura y la numeración, y el desarrollo de la matemática durante el periodo babilónico. Posteriormente se adentra en la conceptualización durante este periodo del círculo, sus elementos y los coeficientes que los relacionaban. Dedico un apartado a la controversia de si se puede derivar de los algoritmos de cálculo un valor para π más preciso del usualmente establecido de 3. Al final, el lector encontrará en los apéndices una extensa colección de problemas matemáticos que involucran figuras planas y cuerpos circulares. Estos problemas le permitirán entender mejor la conceptualización babilónica del círculo, la relevancia de las constantes en los cálculos, como sustitución de nuestras actuales fórmulas, y apreciar su grado de conocimiento del cálculo de volúmenes.

BREVE RESEÑA HISTÓRICA DE LAS MATEMÁTICAS MESOPOTÁMICAS

El inicio de la escritura y de la matemática

El valle que se extiende entre los ríos Tigris y Éufrates fue habitado por primera vez a mediados del quinto milenio A.C. Las gentes que durante los dos o tres milenios precedentes habían cultivado las colinas circundantes empezaron a agruparse en pequeños poblados que rápidamente se convirtieron en grandes y complejos centros urbanos. Las dos principales ciudades fueron Uruk en el Éufrates y Susa en el río Shaur. El gran salto que supuso en la organización social este proceso llevó consigo la aparición de la escritura y la matemática, estrechamente ligadas la una a la otra.

La administración de los centros urbanos precisaba de llevar un registro y contabilidad a fin de gestionar impuestos, almacenes, etc. Con este fin, en un principio se usaron pequeñas fichas de arcilla con forma geométrica o regular para representar una cantidad específica de un objeto concreto. Es decir, no se diferenciaba entre el número a representar y el objeto que se estaba contando. Posteriormente estas fichas eran guardadas en vasijas de arcilla selladas para evitar manipulaciones malintencionadas. Como era imposible saber el contenido sin romper la vasija fue necesario imprimir las fichas sobre su superficie antes de introducirlas. El siguiente paso fue inmediato, se podían imprimir las fichas en una tabla de arcilla sellada por un funcionario sin necesidad de guardarlas posteriormente.

En esta etapa, cerca del 3200 A.C., las fichas seguían representando tanto la cantidad como el objeto. Así, el siguiente paso fue la separación del sistema de recuento del objeto a ser contado. En las tablillas de arcilla aparecían impresiones

para representar un número seguidas de un símbolo que representaba el objeto que se estaba contando. Es el inicio de la escritura y de la matemática. Con la aparición del número se posibilitaba la grabación en tablillas de operaciones aritméticas.

En este periodo convivían diferentes conjuntos de unidades. Ya para contar objetos había cuatro conjuntos, a los que se añadían el conjunto de unidades para medir áreas, el sistema para contabilizar el tiempo (días, meses y años) y cuatro conjuntos de unidades de capacidad según el tipo de grano.

Las matemáticas durante el tercer milenio

En este periodo la región de Mesopotamia estaba contralada por diversas ciudades-estados, cada una con su dios, su legislación y un fuerte aparato burocrático, el cual seguía siendo el principal usuario de la escritura y la contabilidad (véase Figura 1).

Los escribas eran los encargados de la escritura, conocían los secretos del cálculo, eran capaces de evaluar los impuestos, gestionar los trabajos de construcción y transcribir las órdenes de los gobernantes. En este periodo aparecen las escuelas de escribas y nos encontramos con tablas escritas con el simple propósito de practicar y aprender. La escritura ha evolucionado y se transcriben los sonidos del habla, en Sumerio. De esta forma se registran no sólo listas o números sino parte del habla humana:

Cuando yo era joven aprendí en la escuela el arte del escriba en las tablas de Sumer y Acadia. Entre los nacidos de alta cuna ninguno podía escribir como yo. Donde la gente va por instrucción en el arte del escriba yo dominé completamente la sustracción, la adición, el cálculo y la contabilidad.¹

A finales del siglo XXIV A.C. se unifica Mesopotamia por primera vez bajo la dinastía de reyes procedentes de Acadia (ciudad cuyo emplazamiento todavía permanece sin identificar). Durante este periodo se unifican los diferentes conjuntos de unidades en un nuevo sistema basado en divisiones de 60. De este periodo sólo se conservan ocho tablillas con problemas matemáticos, procedentes de Girsu y Nippur.

Al imperio acadio le sucedió el imperio de Ur III, bajo el cual la administración creció enormemente y se centralizó. Este proceso llevó consigo el aumento de las escuelas de escribas pero, sobre todo, fue necesario un alto grado de uniformidad en el proceso de formación de escribas y burócratas. Probablemente el sistema sexagesimal fue perfeccionado en este periodo aunque su marco conceptual se

¹ Precedente de un himno de auto alabanza al rey Shulgi, siglo XXI A.C.; de Castellino, G. R. (1972), Two Shulgi hymns (BC), Studi Semitici, 42, Roma. Traducido del inglés por el autor.

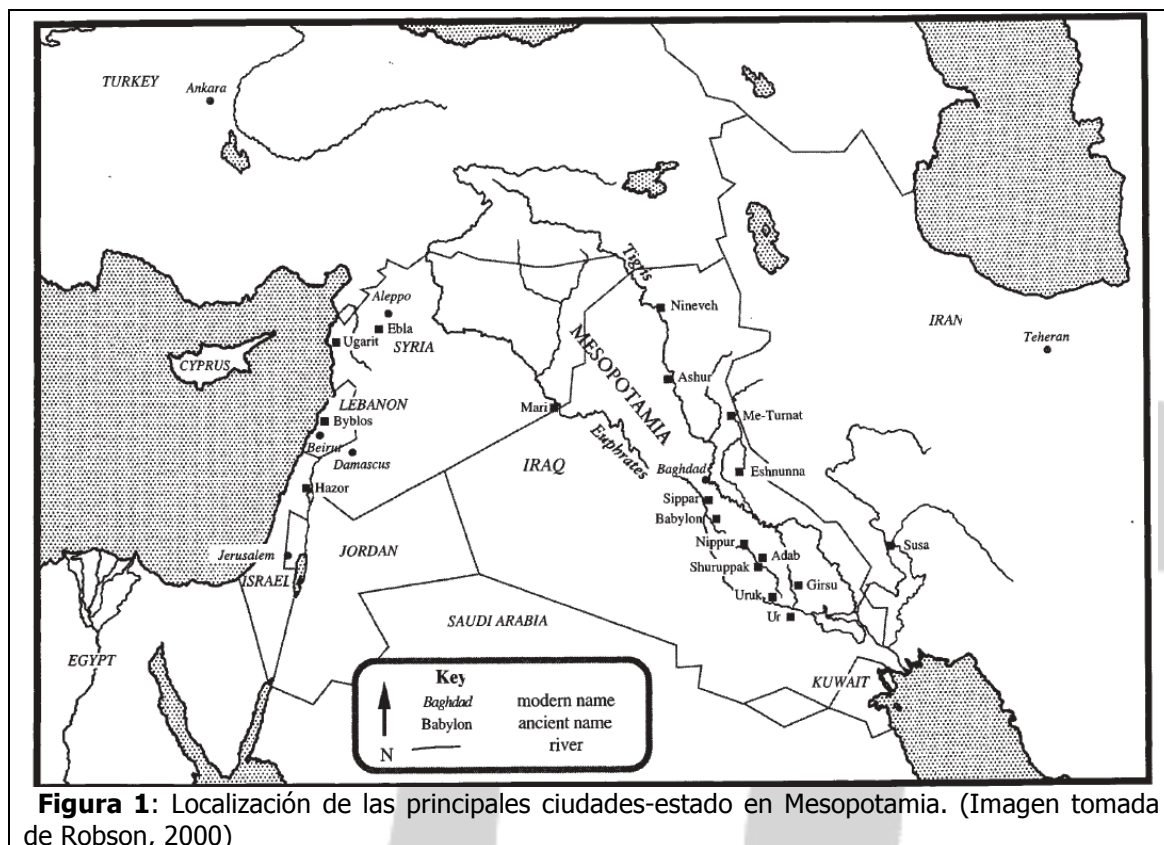
hubiera ido construyendo durante siglos. Sin embargo, aunque los escribas realizaran sus cálculos con el sistema de numeración sexagesimal, los resultados eran escritos en los documentos en diferentes sistemas de notación.

El Imperio de Babilonia

El imperio de Ur III colapsó entre otros motivos bajo el peso de su propia burocracia. Así, al inicio del segundo milenio A.C. aparecen de nuevo pequeñas ciudades-estado, una de ellas Babilonia que da nombre a este periodo: paleobabilónico.

Durante el periodo paleobabilónico muchas de las funciones administrativas fueron descentralizadas y privatizadas. Los escribas seguían siendo fundamentales y aparecen cientos de escuelas de escribas que dejan su testimonio arqueológico. Se conservan miles de tablillas de arcilla, muchas de ellas obtenidas a finales del siglo XIX sin el rigor que la ciencia arqueológica impone actualmente, por lo que no es posible datarlas de forma adecuada. Sin embargo, se tienen muchas tablas matemáticas de excavaciones rigurosas procedentes de las ciudades de Mari, Terqa, Me-Turnat o Susa.

Se han encontrado restos de muchas casas-escuela cuya estructura no se diferencia de las demás casas: varias habitaciones pequeñas dispuestas alrededor de un patio central. Sin embargo, la presencia de útiles para la preparación de tablillas, pero sobre todo la presencia de muchas tablillas escritas, pre-recicladas o listas para usarse permiten distinguir las casas escuela de otras casas.



El idioma sumerio, lengua escrita oficial durante el imperio de Ur III, fue dando paso al acadio aunque éste seguía usando la escritura cuneiforme. El sumerio quedó como lengua culta para textos religiosos o la formación, mientras el acadio era la lengua escrita de uso común. Por este motivo los textos matemáticos aparecen en sumerio o traducidos al acadio.

Los textos matemáticos encontrados en el periodo paleobabilónico se pueden clasificar en cinco tipos según su función pedagógica (Robson, 2000). Aparecen *tablillas* que ayudaban a los estudiantes a memorizar relaciones métricas y aritméticas. Son tablillas de multiplicar, dividir, de cuadrados o raíces cuadradas o que permiten conversiones entre diferentes unidades de medida. Estas son las más numerosas que disponemos. Un ejemplo es la tablilla IST. S 485 que muestra en la primera columna los primeros números naturales y en la segunda sus inversos. Los *cálculos* se realizan en pequeñas tablillas redondas donde los escribas copiaban esquemas de resolución, diagramas, notas, etc., por ejemplo la tablilla YBC 7302 donde se calcula el área que encierra una circunferencia tomando como dato su longitud. Los profesores disponían de *colecciones de problemas* que consistían en una serie de problemas (muchas veces sin apenas diferencias) y sus soluciones numéricas. Un ejemplo es la tablilla W 23291 localizada en Uruk y perteneciente al periodo neobabilónico. Los profesores también disponían de *listas de soluciones*, en general números enteros, para distintos conjuntos de parámetros de un mismo

problema. Finalmente, algunas tablillas consisten en *listas de coeficientes* o constantes que permiten obtener unos parámetros de una figura geométrica a partir de otros (no diferenciándose mucho de nuestras actuales listas de fórmulas). Dentro de este tipo de tablillas destacamos la TMS 3, del periodo paleo-babilónico, que contiene una extensa colección de constantes que relacionan diferentes elementos de figuras circulares. (En los Apéndices C a E aparecen múltiples ejemplos de estos tipo de tablillas).

La matemática era conceptualizada a través de modelos de resolución, consistentes en algoritmos o pasos que los estudiantes seguían para obtener la respuesta buscada. No había ninguna demostración del método de resolución y era la experiencia continua la que le daba validez.

Hay evidencias de que el aprendizaje de las matemáticas iba más allá de lo puramente utilitario, de que empezaba a aparecer el placer de hacer matemáticas por el propio placer de hacerlas. Una colección de problemas sobre graneros localizada en Sippar mantiene en sus primeros problemas constantes las dimensiones de los graneros y se pide el cálculo de un parámetro por vez. Los siguientes problemas de la colección solicitan el cálculo de parámetros a través de otros datos que difícilmente se daban en la vida real. Por ejemplo, se da como dato la diferencia entre la longitud y el grosor o se dice que la anchura es la mitad de la longitud más uno. También hay problemas donde las dimensiones del granero son claramente inverosímiles y no pueden corresponder a un problema real.

Del periodo histórico del sur de Mesopotamia que va desde alrededor del 1600 al 1000 A.C se tiene muy poca información y se han encontrado muy pocas tablas matemáticas. Durante el principio del primer milenio A.C. la tradición matemática continua, aunque sigue sin haber muchas evidencias.

FIGURAS CIRCULARES

La concepción babilónica del círculo

Nosotros concebimos el círculo como la figura generada al girar el radio manteniendo uno de sus extremos fijos, siendo este punto fijo el centro del círculo. La circunferencia sería la línea curva descrita por el extremo libre del radio al completar un giro. Así, entendemos tanto la circunferencia como el círculo como figuras generadas y, en ese sentido, definidas por el radio. Esta concepción se refleja en las fórmulas que relacionan los elementos *área* (A), *longitud* (l) y *radio* (r) de un círculo y que aprenden los escolares, donde el área y la longitud se calculan a partir del radio y la constante π ,

$$A = \pi r^2$$

$$l = 2\pi r$$

La concepción de los babilónicos del círculo era completamente diferente como se deduce de los problemas que nos han llegado y que relacionan los elementos de un círculo, así como de los algoritmos que empleaban para obtener unos elementos a partir de otros. En el periodo paleobabilónico el elemento generador es la longitud de la circunferencia, siendo el círculo la figura que encierra. El radio y el diámetro eran entendidos como elementos de la circunferencia sin darles ningún carácter generador.

Dos ejemplos sencillos de la concepción babilónica del círculo los encontramos en las tablillas del YBC 7302 e YBC 11120, ambas del periodo paleobabilónico. La primera muestra una circunferencia en la que aparecen el número 3 en la parte superior, el 45 en el interior y el 9 en la parte derecha (véase Figura 2). Su interpretación, si aceptamos que los tres valores son menores que

60, sería la siguiente, el área del círculo es 45 que se obtiene como $5 \cdot 3^2$. ¿Cómo se llega a esta fórmula? La relación entre el área y la longitud de un círculo viene dada



Figura 2: Tablilla YBC 7302.

por $A = l^2/4\pi$, que podemos aproximar por $A = \frac{1}{12}l^2$, fórmula que refleja el algoritmo seguido por los escribas para obtener el área encerrada por una circunferencia a partir de su longitud. En notación sexagesimal se tiene que $\frac{1}{12} = 0;05$.² En el periodo babilónico no se disponía de fórmulas pero si se tenían tablillas de coeficientes y uno de ellos era 5, denominado *la constante del círculo* que relaciona el área con la longitud (al cuadrado) de una circunferencia. De esta forma, se tiene que 3 es la longitud de la circunferencia (y por eso parece al lado de ésta), 9 es su cuadrado y por tanto el área es $0;05 \cdot 9 = 0;45$, valor que por representar el área aparece dentro de la circunferencia.

La tablilla YBC 11120 vuelve a mostrar una circunferencia con los valores de 1 30 arriba, 2 15 a la derecha y 11 15 en el interior. Se tiene que $1;30^2 = 2;15$ y que $0;05 \cdot 2;15$ es igual a $0;11,15$.

Un ejemplo aun más claro de la diferente concepción del círculo (o la circunferencia) entre los babilónicos y nosotros lo tenemos en el problema (i) planteado en la tablilla Haddad 104, dónde en un cálculo intermedio se tiene que calcular el área del círculo dado su diámetro (d).³ Nosotros realizaríamos este cálculo

² La fracción $1/12$ se escribe en notación sexagesimal como $0;05$. Basta observar que $60/12 = 5$. (Véase el Apéndice A)

³ El problema Haddad 104 (i) pide calcular la capacidad de un cilindro. Aquí se indican los cálculos parciales usados para obtener el área de la base. Véase el problema completo en el Apéndice E.

directamente como $A = \pi(d/2)^2$. Sin embargo la tablilla indica primero como calcular la longitud de la circunferencia a partir del diámetro, $l = 3d$, para después obtener el área de la circunferencia como se ha descrito previamente. El diámetro mide 0;05 y los cálculos indican: *triplica 0;05, el diámetro y 0;15 aparecerá. La circunferencia del cilindro es 0;15. Eleva al cuadrado 0;15 y 0;03,45 aparecerá. Multiplica 0;03,45 por 0;05, la constante del círculo, y 0;00,18,45, el área, aparecerá.*

Los elementos de un círculo

Los babilónicos usaban tres palabras diferentes para referirse tanto al círculo como a la circunferencia: los logogramas GÚR, KA.KÉS y la palabra acadia *kippatum*. Las tres denominaciones pueden leerse en tablillas de constantes, pero sólo la primera y la última en tablillas con problemas. El diámetro y el radio son denominados DAL/*tallum* y *pirkum*, aunque para los babilónicos estos términos tienen el significado matemático más amplio de *transversal largo* y *transversal corto* y son perpendiculares el uno al otro.

Otros elementos de la circunferencia que aparecen en problemas son la cuerda (c), el arco (a) y la flecha (f). (Véase Figura 3).

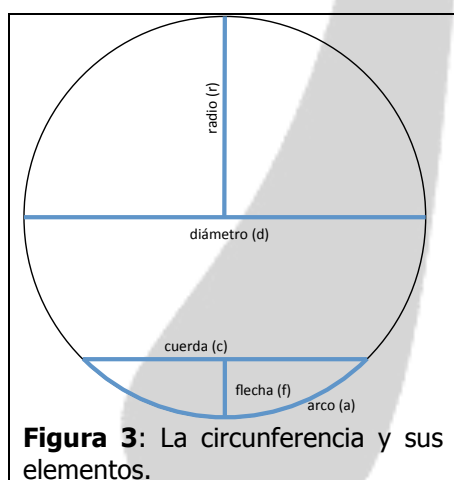


Figura 3: La circunferencia y sus elementos.

π en la Babilonia antigua

Los escribas y matemáticos de la época babilónica no usaban fórmulas que relacionaran los elementos de un problema, ni ningún tipo de símbolo. En su lugar disponían de tablillas de coeficientes que relacionaban dos o más elementos y que junto con simples algoritmos de cálculo memorizados les permitían resolver sus problemas. Hemos visto tres ejemplos de reglas de calculo en las tablillas YBC 7302,

YBC 11120 y Haddad 104-i y del uso del coeficiente 5 que relaciona la longitud de un círculo con su área.

Los primeros coeficientes sobre el círculo fueron encontrados en los años 20 del pasado siglo (Neugebauer y Struve 1929) y aparecen en multitud de problemas matemáticos del periodo babilónico. El coeficiente más frecuente, tanto en listas de coeficientes como en textos, es 5, que permite calcular el área de un círculo a partir del cuadrado de su circunferencia (en notación actual $A = 0;05l^2$). Un segundo coeficiente es 20 o su inverso, 3, que relaciona el diámetro con la longitud de la circunferencia, $d = 0;20l$ y $l = 3d$. Estos coeficientes aparecen con igual frecuencia en los textos matemáticos y, a menudo, simultáneamente en el mismo. Un coeficiente también muy empleado es 15 que relaciona el área de una semicircunferencia con su longitud y diámetro, $A_s = 0;15s \cdot d$, donde A_s es el área de la semicircunferencia y s longitud de arco (semi-longitud de la circunferencia). Existen otros muchos coeficientes para el círculo y la circunferencia, aunque muchos de ellos no son nunca usados en textos matemáticos. (Véase Apéndice C)

¿Qué podemos deducir de los coeficientes usados por los matemáticos babilónicos con relación al valor (implícito) de π ? Smeur (Smeur, 1969) considera que los babilónicos, al menos los del periodo antiguo, no tenían conocimiento de la relación que hay entre las constantes usadas en los problemas con circunferencias, los números 3, 0;05 ó 0;15, y desde luego tampoco de que estas constantes estaban todas conectadas a través de un mismo factor de proporcionalidad, π .

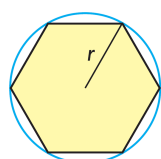
La constante π encarna al menos dos relaciones: la de la longitud de una circunferencia respecto del diámetro, y la del área de un círculo respecto del cuadrado del radio:

$$\pi_1 = \frac{l}{d} \quad \text{y} \quad \pi_2 = \frac{A}{r^2}$$

Se tienen muchos textos donde los matemáticos babilónicos calculan la longitud de la circunferencia triplicando el diámetro, e inversamente obtienen el diámetro como un tercio de la longitud.⁴ Estas operaciones suponen con nuestra terminología actual un valor implícito de $\pi_1 = 3$.

En ningún momento los matemáticos de la Babilonia antigua calculan el área del círculo como 3 veces el cuadrado del radio (ya hemos visto que este cálculo

4



Probablemente este resultado venga de la observación directa de que el hexágono inscrito en una circunferencia tienen un perímetro similar, junto con el hecho de que el radio de la circunferencia es igual al lado del hexágono. Por tanto, la longitud de la circunferencia puede ser aproximada por seis veces el radio o tres veces el diámetro.

pasaba por calcular primero la longitud del círculo a partir del diámetro). Más aun, se sabe que el cálculo del área de un semicírculo lo obtenían de tres formas diferentes y ninguna de ellas consistía en calcular la mitad del área del círculo. De hecho, la lista de coeficientes para el semicírculo es mayor que la del círculo y muchas de estas constantes no tienen contraparte para el círculo, pareciendo que ambas figuras fueran conceptualizadas de forma independiente.

En las tablillas de constantes Ud y Ue (YBC 5022, texto Ud, línea 58; y YBC 7243, texto Ue, línea 35 en Neugebauer y Sachs, 1945) aparecen las constantes 10, 15 y 45 que permiten obtener el área de un semicírculo como:

$$A_s = 0;10 \cdot a^2, \text{ siendo } a \text{ el arco del semicírculo.}$$

$$A_s = 0;15 \cdot a \cdot d$$

$$A_s = 0;45 \cdot d \cdot r$$

Aunque en la tercera fórmula aparece la letra r de radio, es una interpretación del *pikum* o transversal corto que los babilónicos no pensaban como radio, sino como el elemento perpendicular al diámetro (o transversal largo). De nuevo, todos los algoritmos empleados en el cálculo del área de una circunferencia suponen un valor implícito de $\pi_2 = 3$.

Parece, por tanto, que la constante π_2 estaba fuera del marco conceptual de los matemáticos babilónicos, que no estaban familiarizados con la fórmula $A = \pi r^2$ y que efectivamente las constantes 3, 0;05 y 0;15 nunca se asimilaban como transformaciones de un mismo valor, π .

Robson comparte esta visión según la cual los babilónicos nunca asimilaban los valores de 3 y 0;05 (Robson, 1999). Además, el uso de estos dos coeficientes es sólo el reflejo de su concepción de la circunferencia como generadora de los restantes elementos de esta figura. Ahora bien, Robson no encuentra razones que justifiquen una conceptualización diferente entre el círculo y el semicírculo, es decir, las constantes 5 y 15 si estaban asimiladas como provenientes de una misma figura. Como argumento usa la constante 2 30 para el semicírculo, que aparece en la tablilla C 13a encontrada en la región de Eshnunna, y es la mitad de 5 por lo que permite encontrar el área del semicírculo como la mitad del área del círculo, $A_s = \frac{0;05}{2} l^2 = 0;02,30 \cdot l^2$.

En resumen, para los matemáticos del periodo babilónico la circunferencia es el concepto primario generador de los demás elementos: círculo, diámetro, radio, posiblemente semicírculo, etc. La constante que relaciona la longitud de la circunferencia con el área que ésta encierra es 0;05 y la constante que relaciona la longitud con el diámetro es 0;20 (el inverso de 3). Aunque ambas constantes

suponen un valor implícito de 3 para π , los babilónicos nunca las consideraron conectadas.

¿Conocían los babilónicos un valor más preciso de π ?

En general los investigadores coinciden en que si hay que atribuir un valor (implícito) a π para los babilónicos, éste es 3. Los intentos de ver en otras constantes valores más precisos siguen sin ser convincentes, en concreto para la constante 4 48 que aparece en múltiples tablillas de constantes (YBC 5022, texto Ud, línea 58; y YBC 7243, texto Ue, línea 35).

Algunos autores interpretan la constante 4 48 como una alternativa más precisa de la constante 5 para obtener el área del círculo a partir de su circunferencia. Si así fuera, se tendría, argumentan estos autores, en nuestra actual notación que $0;04,48 = 1/4\pi$, es decir, $4\pi = 1/0;04,48 = 12;30$ y por tanto $\pi = 3;07,30$ (notación sexagesimal) = 3,125 (notación decimal). Así, Powell afirma (Powell, 1984),

Interpretaciones que parten de la suposición de que la aproximación $\pi = 3$ es debida a ignorancia o facilidad de cálculo no atacan al corazón del asunto. El valor fue mantenido después del descubrimiento de 3;07,30, no ante todo porque 3 era fácil de usar, sino porque simplificaba la conceptualización de la proporción entre las áreas de círculos y cuadrados, y probablemente porque el sistema ya había desarrollado constantes para hacer frente a este problema.

Sin embargo hay fuertes razones que inciden en lo incorrecto de esta interpretación, siendo las dos más claras: primero que la constante 4 48 nunca es mencionada como *la constante del círculo*, como ocurre siempre con 5, y en cambio se la denomina de las siguientes formas: *el coeficiente de almacenamiento de grano, el espesor de un log⁵, almacenamiento de grano, y el coeficiente de un barco* (Robson, 2000); en segundo lugar, se hace uso exclusivo de ella en problemas de almacenes de grano para pasar de una medida de superficie a otra de volumen, mientras que la constante 5 carece de unidades.

Veamos en detalle el problema que se plantea en YBC 8600 para valorar interpretaciones alternativas del coeficiente 4 48 más verosímiles atendiendo a los manejos más usuales de la época. Nuestra argumentación sigue de cerca la de Neugebauer y Sachs (1945) y Robson (2000).

⁵ Término usado para hacer referencia a un almacén de grano que podía tener tanto forma cilíndrica, como de cono y aun de cono truncado.

YBC 8600: traducción desde Neugebauer y Sachs (1945, pp. 57-58). Entre paréntesis se ha añadido texto para ayudar en la comprensión del problema. Entre corchetes texto que se ha perdido.

Línea Reverso

- 1 1 cubo es la circunferencia de un cilindro
- 2 ¿Cuál es su espesor?
- 3 Haz tu, multiplica 0;05 por 0;05 y (el resultado)
- 4 0;00,25 deberás multiplicar por 4,48, el coeficiente fijo,
- 5 y (el resultado) 2. 2 sila es el espesor del cilindro.
- 6 2 s[ila es el es]pesor del cilindro
- 7 ¿Cuál es [la circunferen]cia del cilindro?

Línea Lado

- 8 (Haz) tu, el recíproco de 4,48, (a saber,)
- 9 0;00,12,30,

Línea Reverso

- 10 Multiplica por 2 sila y (el resultado es)
- 11 0;00,25. La raíz de 0;00,25 es
- 12 0;05. 1 cubo es la circunferencia del cilindro.

Las cinco primeras líneas describen el algoritmo para calcular el “espesor” de un cilindro partiendo de su circunferencia; mientras que las líneas 6 a 12 dan el algoritmo para realizar el cálculo inverso.

Hay mucha evidencia en textos babilónicos del uso de sila, una medida de capacidad, para indicar el “espesor” de un almacén. Así, este texto muestra como transformar la circunferencia, medida en unidades de rod a “espesor” medido en unidades de sila (véase VAT 8522, apéndice E).

En las líneas 1 a 5, la circunferencia es $l = 1 \text{ cubo} = 0;05 \text{ rod}$, y el “espesor” es calculado como,

$$\alpha l^2 = t = 2 \text{ sila},$$

donde α , llamado “coeficiente fijo”, (la constante) tiene el valor de 4,48. El texto siguiente resuelve el problema inverso, es decir, la circunferencia es obtenida como,

$$\sqrt{\frac{t}{\alpha}} = l = 0;05 \text{ rod} = 1 \text{ cubo}.$$

La hipótesis de que el “espesor” es el diámetro del cilindro esta descartada porque en el texto se trabaja con el cuadrado de la circunferencia y se obtiene una medida de capacidad. Los cálculos apuntan a la obtención de un área o volumen. La hipótesis de que el resultado es un área lleva entender el sila también como una unidad de superficie lo cual no se ve apoyado por el conocimiento actual del complejo sistema métrico en el periodo babilónico. Todas las evidencias van en la misma dirección, el resultado es una medida de capacidad.

Veamos una explicación plausible de $\alpha = 4,48$. Como el volumen se da en sila empezaremos por la relación entre capacidad en sila y volumen en sar muy atestiguada en el periodo de la paleobabilónico,

$$1 \text{ sila} = 0;00,00,12 \text{ sar-volumen} = 0;00,00,12 \text{ rod}^2 \cdot \text{cubo}. \quad (1)$$

Además, consideremos como estándar para un almacén la forma y dimensiones de un cubo de lado 6 dedos. El número de unidades sila del “espesor” de un cilindro sería entonces el correspondiente al número de unidades sila de un cilindro de altura 6 dedos (o 0;12 cubos). En nuestro problema donde $l = 0;05 \text{ rod}$, el volumen sería

$$V = \frac{1}{4\pi} l^2 h = 0;05 \cdot 0;05^2 \cdot 0;12 = 0;00,00,25 \text{ sar-volumen}.$$

Como el problema da como resultado 2 sila como el “espesor”, esto significa que,

$$1 \text{ sila} = 0;00,00,12,30 \text{ sar-volumen}. \quad (2)$$

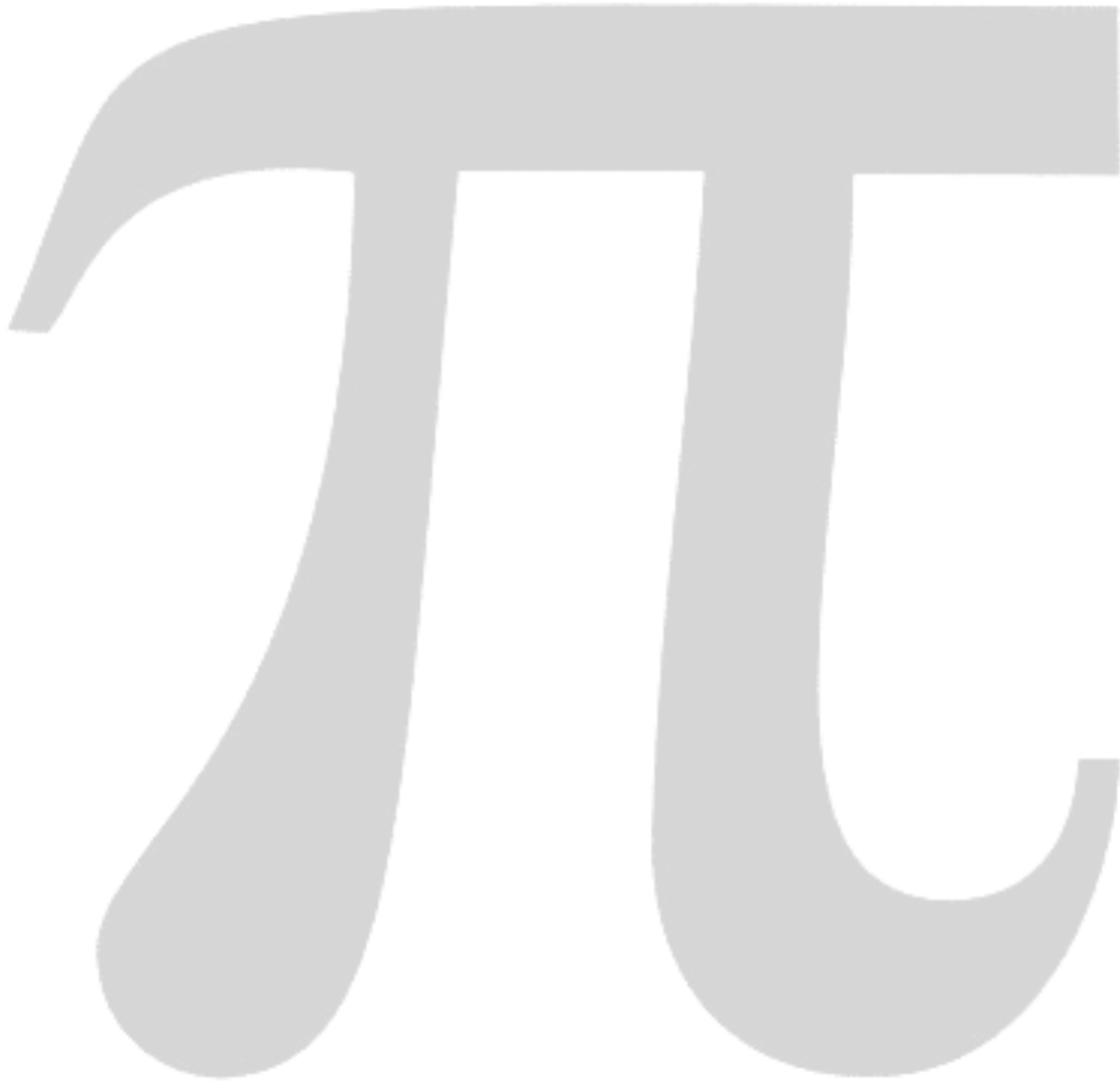
y que el valor 4,48 para α se fijaría como $0;05 \cdot 0;12 / 0;00,00,12,30$.

Ahora bien, las relaciones (1) y (2) no coinciden, es decir, la relación ampliamente usada por los babilónicos entre sila y sar-volumen (1) no coincide con la que se deduce del problema (2). Veamos el efecto de usar una constante α' basada en la relación firmemente establecida (1). El valor sería $\alpha' = 0;05 \cdot 0;12 / 0;00,00,12 = 5,00$. La siguiente tabla muestra una posible explicación de la sustitución de $\alpha' = 5,00$ por la menos precisa $\alpha = 4,48$:

Circunferencia, l	“Espesor”	
	$\alpha = 4,48$	$\alpha' = 5,00$
1 cubo	2 sila	2;05 sila
2	8	8;20
3	18	18;45
4	32	33;20
5	50	52;05

El uso de $\alpha = 5,00$ lleva a fracciones de sila para el “espesor” cuando la circunferencia es un número entero de cubos. La sustitución por $\alpha = 4,48$ podría estar motivada por el deseo de obtener soluciones enteras.

La interpretación del coeficiente 4 48 dista de estar clara pero de lo que no cabe duda es de que no se trata de una mejor aproximación de la constante del círculo y si de un coeficiente que permite pasar de áreas a volúmenes.



APÉNDICES

Apéndice A: Reglas de transcripción de los números escritos en sistema sexagesimal seguidas en este artículo.

Las siguientes reglas se basan en Roger y Jòdar (2004):

- 1.- No se han usado más que las nueve cifras usuales (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 0).
- 2.- Los órdenes de unidades se separan por una coma. La transcripción a,b,c de un número N escrito en notación sexagesimal significa: $N = a \cdot 60^2 + b \cdot 60 + c$. Por ejemplo $N = 2,23,14$ en sexagesimal significa $N = 2 \cdot 60^2 + 23 \cdot 60 + 14 = 8594$ en decimal.
- 3.- Las unidades fraccionarias se separan de las unidades enteras por un punto y coma. Por ejemplo, $N = 0;07,22,48$ en sexagesimal es equivalente a $N = 7 \cdot 60^{-1} + 22 \cdot 60^{-2} + 48 \cdot 60^{-3} = 0,123$ en decimal.
- 4.- Para facilitar la lectura, cada orden lo forman dos dígitos, usándose el cero cuando el orden es menor que 10. El orden entero superior queda como excepción. Así se escribe 7,04,08,23 en lugar de 7,4,8,23; o 0;45,08,12 en lugar de 0;45,8,12.

Apéndice B: Metrología entre los siglos XXI y XVII A.C.

Medidas de longitud

1 dedo = 17 mm

1 cubo = 30 dedos (0.5 m). Es la medida estándar de altura.

1 rod = 12 cubos (6 m)

Medidas de área: 1 bariga = 1,00,00 rod²

Medidas de volumen

1 sar-área = 1 rod² (36 m²)

1 sar-volumen = 1 rod² x 1 cubo (18 m³)

1 ubu = 50 sar (1800 m² o 900 m³)

1 iku = 2 ubu = 1,40 sar (3600 m² o 1800 m³)

Medidas de capacidad

1 sila = 1 litro

1 ban = 10 sila (10 litros)

1 bariga = 6 ban (60 litros)

1 gur = 5 bariga (300 litros)

Medidas de peso: 1 talento = 100 minas (30 kg)

Medidas de ladrillos: 1 sar-volumen = 7;12 sar-ladrillos

En los Apéndices C a E se hace una extensa recopilación de problemas centrados en figuras circulares, en los que el algoritmo de resolución usa coeficientes que de forma implícita incluyen el número π . Cada Apéndice agrupa problemas de contenido similar, así el Apéndice C trata de listas de coeficientes, el Apéndice D trata del cálculo de los elementos de una figura circular, y el E incluye listas de problemas de figuras con volumen.

En todos los casos se da la fuente bibliográfica empleada. Hay que tener en cuenta que aquí se muestra una traducción al castellano desde la traducción al inglés de los problemas originales en Sumerio, y que no se pretende el rigor lingüístico sino la comprensión del algoritmo seguido.

Recordemos que en las traducciones el texto entre paréntesis ha sido incluido por el autor para mejorar la interpretación y el texto entre corchetes ha desaparecido del original.

Apéndice C: Listas de coeficientes.

TMS 3: traducción desde Friberg (2007, pp. 133-134)

TMS 3 es una tablilla de constantes del periodo paleobabilónico cuya descripción completa aparece en Bruins y Rutten (1961).

La siguiente lista muestra el contenido de la tablilla para aquellas constantes que relacionan elementos de una figura circular y hacen un uso implícito de π . Se observará que todas las constantes asumen el valor $\pi = 3$.

<u>Constante</u>	<u>Explicación</u>
5, constante del círculo	0;05 veces la longitud al cuadrado del círculo da el área
20, transversal largo del círculo	0;20 veces la longitud da el transversal largo ⁶
10, transversal corto del círculo	0;10 veces la longitud da el transversal corto
15, constante del semicírculo	0;15 veces la longitud del semicírculo por el diámetro da el área del semicírculo
40, transversal largo del semicírculo	0;40 veces la longitud da el transversal largo
20, transversal corto del semicírculo	0;20 veces la longitud da el transversal corto
6,33,45, constante del arco	0;06,33,45 veces la longitud al cuadrado da el área
52,30, transversal largo del arco	0;5,30 veces la longitud da el transversal largo
15, transversal corto del arco	0;15 veces la longitud da el transversal corto
13,20, constante del grano de cebada	0;13,20 veces la longitud al cuadrado da el área
56,40, transversal largo del grano de ceb.	0;56,40 veces la longitud da el transversal largo
23,20, transversal corto del grano de ceb.	0;23,20 veces la longitud da el transversal corto
16,52,30, constante del ojo de buey	0;16,52,30 veces la longitud al cuadrado da el área
52,30, transversal largo del ojo de buey	0;52,30 veces la longitud da el transversal largo
30, transversal corto del ojo de buey	0;30 veces la longitud da el transversal corto
26,40, constante de la ventana de lira	0;26,40 veces la longitud al cuadrado da el área
1,20, transversal largo de la vent. de lira	1;20 veces la longitud da el transversal largo
33,20, trans. corto de la vent. de lira	0;33,20 veces la longitud da el transversal largo
15, constante de la ventana de lira de 3	0;15 veces la longitud al cuadrado da el área

En esta secuencia de constantes se dan tres coeficientes numéricos para seis figuras geométricas, en orden, el círculo, el semicírculo, el arco, el grano de cebada, el ojo de buey y la ventana de la lira (véase Figura 4). Estos coeficientes permiten calcular para cada figura el área, el transversal largo y el transversal corto. La lista termina con un único coeficiente para ventana de lira de triángulo.

Las tres primeras entradas, las del **círculo**, se pueden explicar como sigue: si el círculo tiene una circunferencia l , entonces el área A , el diámetro d , y el radio r se calculan como:

$$A = \frac{1}{4\pi} l^2 \simeq \frac{1}{12} l^2 = 0;05 l^2$$

$$d = \frac{1}{\pi} l \simeq \frac{1}{3} l = 0;20 l$$

$$r = \frac{1}{2\pi} l \simeq \frac{1}{6} l = 0;10 l$$

⁶ Recordemos que la idea de diámetro no aparece en la conceptualización que los babilónicos tienen del círculo y que para ellos existe el transversal largo y perpendicular a éste el transversal corto, cuya interpretación depende de la figura. Para el círculo corresponden al diámetro y el radio, pero para el grano de cebada, ojo de buey y la ventana de la lira corresponderían a elementos diferentes de la figura.

Para el **semicírculo** de longitud de arco a , área A_s , diámetro d y radio r , estos parámetros están conectados a través de las siguientes formulas:

$$A_s = \frac{1}{4} a \cdot d = 0; 15 a \cdot d$$

$$d = \frac{2}{\pi} a \approx \frac{2}{3} a = 0; 40 a$$

$$r = \frac{1}{\pi} a \approx \frac{1}{3} a = 0; 20 a$$

El resto de figuras requiere una explicación más detallada para, primero, explicar como conceptualizaban los babilónicos dichas figuras y, segundo, calcular de forma exacta y aproximada las constante del área, transversal largo y transversal corto a partir de la longitud. Para ello seguimos las indicaciones de Friberg (2007, pp 317-320)

Arco

El *arco* es una figura como la mostrada en Figura 4a, acotada inferiormente por una línea recta (el transversal largo), d , y por arriba por una curva de longitud a . La línea curva esta formada en su parte media por un tercio de una circunferencia y en cada uno de sus extremos por un sexto de circunferencia.

La longitud de la circunferencia generadora del arco es seis cuartos de la longitud del arco, es decir, $l = \frac{6}{4} a = 2\pi r$. Por tanto el transversal corto (p) es el radio del círculo,

$$p = r = \frac{3}{4\pi} a \approx \frac{1}{4} a = 0; 15 a.$$

En un círculo de radio r , la longitud del lado del triángulo equilátero inscrito es $\sqrt{3}r$. De la Figura 4a se tiene que la longitud del transversal largo es dos veces dicha magnitud, $d = 2\sqrt{3}r = 2\sqrt{3} \frac{3}{4\pi} a$. Sustituyendo $\sqrt{3}$ por la aproximación usada por los babilónicos de $7/4$ se tiene que,

$$d = 2\sqrt{3} \frac{3}{4\pi} a \approx \frac{7}{8} a = 0; 52,30 a.$$

Por último, la Figura 4a muestra que el área del arco es igual al área de un triángulo de base el transversal largo y altura el transversal corto. Por tanto,

$$A = \frac{1}{2} d \cdot p = \sqrt{3} \left(\frac{3}{4\pi} a \right)^2 \approx \frac{7}{64} a^2 = 0; 06,33,45 a^2.$$

Así, se obtienen las tres constantes correspondientes al arco.

Grano de cebada

El *grano de cebada* aparece al duplicar una de las cuatro secciones circulares que queda al inscribir un cuadrado en un círculo, es decir, la superficie encerrada por el lado del cuadrado inscrito y la circunferencia (véase Figura 4b). El transversal largo sería el eje mayor de simetría, el lado del cuadrado, y el transversal corto el eje menor.

El radio del círculo se obtiene como $r = \frac{2}{\pi}a \approx \frac{2}{3}a$. El semi-transversal largo es el lado de un cuadrado de diagonal r . Por tanto,

$$d = \sqrt{2}r = \sqrt{2}\frac{2}{\pi}a \approx \frac{17}{12}\frac{2}{3}a = \frac{17}{18}a = 0;56,40a$$

donde se ha usado la aproximación de $\sqrt{2}$ por $17/12 = 1;25$. Esta aproximación para la raíz de 2 fue mejorada ya en el periodo paleobabilónico por la aproximación $1;24,51,10$ (Fowler and Robson, 1998).

La mitad del transversal corto es el radio menos la mitad del transversal largo. Es decir,

$$p = 2\left(r - \frac{d}{2}\right) = 2\left(\frac{2}{\pi}a - \sqrt{2}\frac{1}{\pi}a\right) \approx \frac{7}{18}a = 0;23,20a.$$

La mitad del área del grano se obtiene de restar del área de un cuarto del círculo el área del triángulo de base el transversal largo y de altura la mitad de dicho transversal. Por tanto,

$$A = 2\left(\frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{1}{2}d\frac{d}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2}\right)a^2 \approx \frac{2}{9}a^2 = 0;13,20a^2.$$

Ojo de buey

El *ojo de buey* se obtiene al duplicar la sección que queda al inscribir un triángulo equilátero en un círculo, es decir, la superficie encerrada por el lado del triángulo inscrito y la circunferencia (véase Figura 4c). El transversal largo sería el eje mayor de simetría, el lado del triángulo, y el transversal corto el eje menor.

Se tiene que la longitud del arco es un tercio de la longitud del círculo, y que el radio del círculo es el transversal corto. Por tanto,

$$p = r = \frac{3}{2\pi}a \approx \frac{1}{2}a = 0;30a.$$

Además, la mitad del transversal corto al cuadrado más la mitad del transversal largo al cuadrado es el radio al cuadrado, por tanto,

$$d = \sqrt{3}r = \sqrt{3} \frac{3}{2\pi} a \approx \frac{7}{8} a = 0;52,30a.$$

La mitad del área del ojo del buey se obtiene de restar del área de un tercio del círculo el área del triángulo de base el transversal largo y de altura la mitad del transversal corto,

$$A = 2 \left(\frac{1}{3} \pi r^2 - \frac{1}{2} d \frac{p}{2} \right) = 2 \left(\frac{3}{4\pi} - \frac{9\sqrt{3}}{16\pi^2} \right) a^2 \approx \frac{9}{32} a^2 = 0;16,52,30a^2$$

Ventana de lira

La *ventana de lira* es un cuadrado cóncavo de lado a (véase Figura 4d). No es difícil calcular los elementos de la figura,

$$r = \frac{2}{\pi} a \approx \frac{2}{3} a,$$

$$d = 2r = \frac{4}{\pi} a \approx \frac{4}{3} a = 1;20a,$$

$$p = 2\sqrt{2}r - 2r = (\sqrt{2} - 1) \frac{4}{\pi} a \approx \frac{5}{9} a = 0;33,20a,$$

$$A = A_{\text{cuadrado}} - A_{\text{círculo}} = 4r^2 - \pi r^2 = (4 - \pi) \frac{4}{\pi^2} a^2 \approx \frac{4}{9} a^2 = 0;26,40a^2.$$

Ventana de lira de triángulo

La *ventana de lira de triángulo* es un triángulo cóncavo de lado a (véase Figura 4e). Por tanto,

$$r = \frac{3}{\pi} a \approx a,$$

$$A = \sqrt{3}r^2 - \frac{1}{2} \pi r^2 = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \right) \frac{9}{\pi^2} a^2 \approx \frac{1}{4} a^2 = 0;15a^2.$$

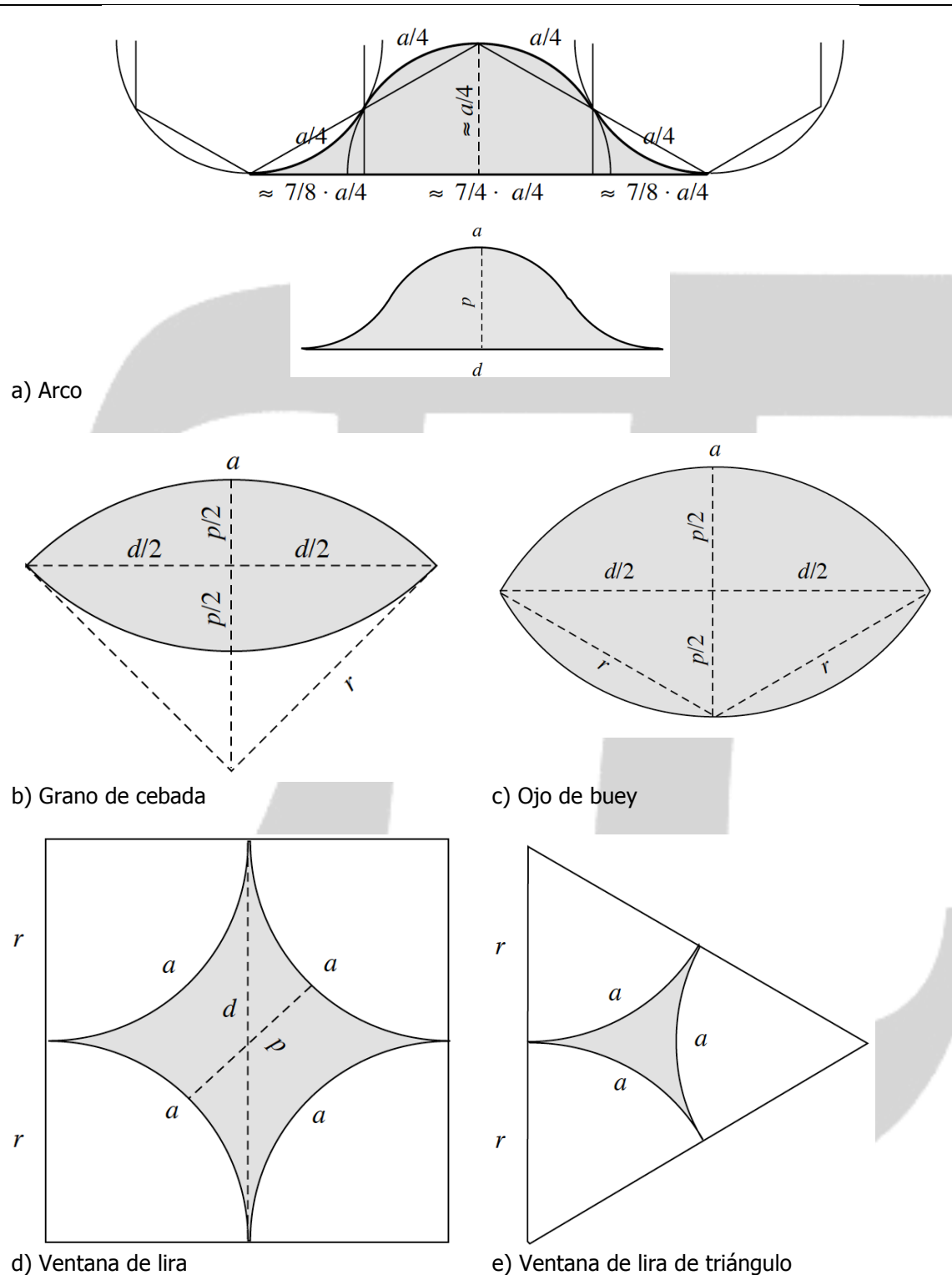


Figura 4: Conceptualización de algunas figuras geométricas en el periodo paleobabilónico y sus principales parámetros: longitud (a), transversal largo (d) y transversal corto (p). (Figuras tomadas de Friberg, 2007, pp. 317-320).

YBC 5022: traducción desde Neugebauer, O. y Sachs, A. (1945, texto Ud, pp. 135)

La líneas 54 y 58, en el reverso de la tablilla, muestran

<u>Constante</u>	<u>Explicación</u>
45, de un semicírculo #3	0;45 veces el transversal largo por el transversal corto da el área del semicírculo
4 48, espesor de un cilindro	(véase explicación en sección Conocían los babilónicos un valor más preciso de π)

YBC 7243: traducción desde Neugebauer, O. y Sachs, A. (1945, texto Ue, pp. 136-137)

Las líneas 1 a 4, 8 y 35 en el anverso de la tablilla, muestran

<u>Constante</u>	<u>Explicación</u>
5, [el círculo]	0;05 veces la longitud al cuadrado da el área del círculo
15, [semicírculo]	0;15 veces la longitud por el transversal largo da el área del semicírculo
10, [semicírculo #2]	0;10 veces la longitud al cuadrado da el área del semicírculo
26 40 el área de la ventana de lira	0;26,40 la longitud al cuadrado da el área de la ventana de lira
...	
14 36 (y) 10, el área del semicírculo	0;10 veces la longitud al cuadrado da el área del semicírculo
...	
4 48, <i>espesor</i> de un cilindro	(véase explicación en sección <i>Conocían los babilónicos un valor más preciso de π</i>)

Todos ellas ya comentadas excepto las constantes 45 y 10 del semicírculo,

$$A_s = \frac{\pi}{4} d \cdot r = 0;45 \cdot d \cdot r,$$

$$A_s = \frac{1}{2\pi} a^2 = 0;10 \cdot a^2.$$

Apéndice D: Problemas sobre el círculo y otras figuras circulares.

MS 3050: traducción desde Friberg (2005, p. 135-136)

Se trata de una tablilla escrita a mano por un alumno en la que se aprecia un

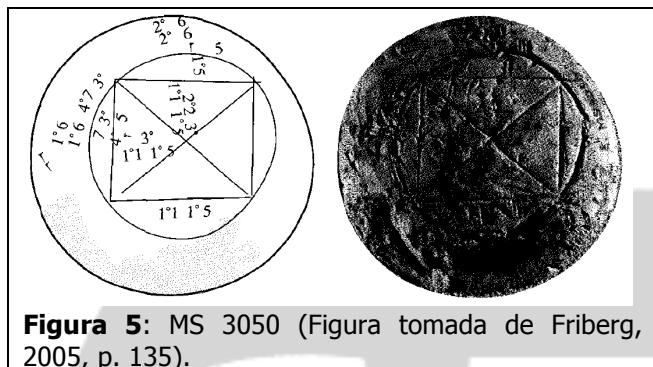


Figura 5: MS 3050 (Figura tomada de Friberg, 2005, p. 135).

círculo con un cuadrado inscrito y varios números. Los valores numéricos parecen representar cálculos parciales para resolver el problema planteado, que se desconoce. (Véase Figura 5)

Es probable que el diámetro de la circunferencia sea 1,00. En este caso, el área del

círculo sería 45,00 (que aparece escrito a la izquierda de la representación) y el área de cada cuarto de círculo sería 11,15 (que explicaría la aparición de este valor en cada cuarto). El número 22,30 sería el área del semicírculo. Los números 15 y 7,30 (escritos en los sectores circulares superior e izquierdo) pueden ser las áreas de la mitad del cuadrado y un cuarto del cuadrado. Los números 26 y 16,40 no tienen una explicación clara.

YBC 7302: traducción desde Smeur (1969). Si la circunferencia es 3, se calcula el área como $A = 0;05 \cdot 3^2 = 0;45$.

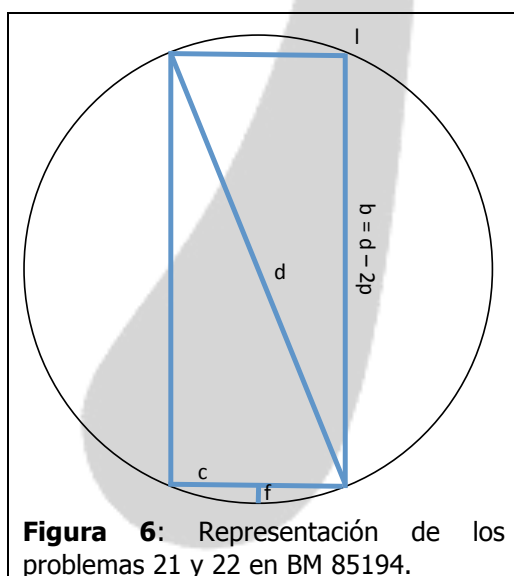
YBC 7848(4): traducción desde Smeur (1969). Si la circunferencia es 1,00,00 se calcula el área como $A = 0;05 \cdot (1,00,00)^2 = 5,00,00,00$.

BM 85194: traducción desde Friberg (2007, pp 45-47) y Katz, V. J. *et alia*. (2007, pp 130-137).

Esta tablilla es un texto del periodo paleobabilónico que contiene una amplia colección de problemas matemáticos muy dispares entre sí. Aquí nos centraremos en los problemas 20, 21 y 29 que relacionan elementos del círculo y en el Apéndice E se verán también los problemas 4, 14, 22, 34 y 35 sobre volúmenes. El problema 20 pide el cálculo de la cuerda a partir de la flecha, mientras que el 21 da como dato la cuerda y hay que obtener la flecha. El problema 29 pide el área de la luna delimitada por un arco de circunferencia y su cuerda y aunque no hace uso de constantes de figuras circulares se ha incluido para ampliar y completar los algoritmos conocidos por los babilónicos para resolver problemas con círculos.

La traducción de los problemas 20 y 21 se ha realizado desde Friberg (2007) y para el 29 se ha seguido Katz, V. J. *et alia*. (2007).

	Traducción ⁷	Explicación
#20:	1,00 el arco 2 el transversal que baja ¿Cuál es el transversal? Tu: Duplica 2, 4 aparecerá 4 de 20, el transversal largo, resta 16 aparecerá 20, el transversal, al cuadrado, 6,40 aparecerá 16 al cuadrado, 4,16 aparecerá 4,16 de 6 40 resta, 2,24 aparecerá La raíz de 2,24 12 es la raíz, el transversal Hecho	$l = 1,00$ La flecha es $f = 2$ La cuerda, ¿c? $2 \cdot f = 2 \cdot 2 = 4$ $d = 0;20 \cdot l = 20$, $d - 2f = 20 - 4$ $= 16 = b$ $d^2 = 20^2 = 6,40$ $b^2 = 16^2 = 4,16$ $d^2 - b^2 = 6,40 - 4,16 = 2,24$ $\sqrt{2,24}$ $= 12 = c$
#21:	1,00 el arco 12 el transversal ¿Cuál es el transversal que baja? Tu: 20, el transversal, al cuadrado, 6 40 aparecerá 12 al cuadrado, 2 24 De 6 40 resta, 4 16 aparecerá La raíz de 16, 4 es la raíz Mitad de 4, 2 aparecerá 2 es el transversal que baja Hecho	$l = 1,00$ $c = 12$ La flecha es ¿f? $d = 0;20 \cdot l = 20$, $d^2 = 20^2 = 6,40$ $c^2 = 12^2 = 2,24$ $d^2 - c^2 = 6,40 - 2,24 = 4,16 = b^2$ $\sqrt{16} = 4$ (error por $\sqrt{4,16} = 16$) $\frac{1}{2} \cdot 4 = 2$ (trampa) $f = 2$ (la respuesta correcta)



problema 20).

Ambos problemas se basan en las relaciones $d^2 = c^2 + b^2$ y $b = d - 2f$ (véase Figura 6). En ambos se calcula el diámetro, d , desde la circunferencia, l , a través del coeficiente 0;20 (aunque el cálculo no aparece indicado en la tablilla y directamente se cita que 20 es el diámetro). En el problema 21 se obtiene c^2 desde d y b ; mientras que en problema 22 se obtiene b^2 desde d y c , para a partir de b calcular f . En el problema 21 el escriba comete un error, pero da la respuesta correcta (que conoce por el

⁷ Recordemos que la traducción al castellano se ha realizado desde la traducción inglesa del texto original, y que la versión en inglés varía en la traducción de muchas expresiones y términos según los autores. En las traducciones al castellano no se busca fidelidad al texto original sino una fácil interpretación. Por ejemplo el término inglés *equalsided* se ha traducido por *sacar la raíz* y *transversal largo* por *diámetro*.

<u>Traducción</u>	<u>Explicación</u>
#29: Una luna creciente. El (arco del) círculo es 1,00, el transversal 50 ¿Cuál es el área? Tu: ¿Cuánto 1 sesenta, el círculo, excede 50? El exceso es 10 Multiplica 50 por 10, el exceso. 8 20 aparecerá Eleva al cuadrado 10, 1,40 aparecerá Resta 1,40 de 8,20. 7,30 aparecerá El área es [7,30]. Hecho	$a = 1,00$ y $c = 50$ ¿A de la luna creciente? $a - c = 1,00 - 50$ $= 10 = f$ $c \cdot f = 50 \cdot 10 = 8,20$ $f^2 = 10^2 = 1,40$ $8,20 - 1,40 = 7, 30$ (incorrecto, es 6,40)

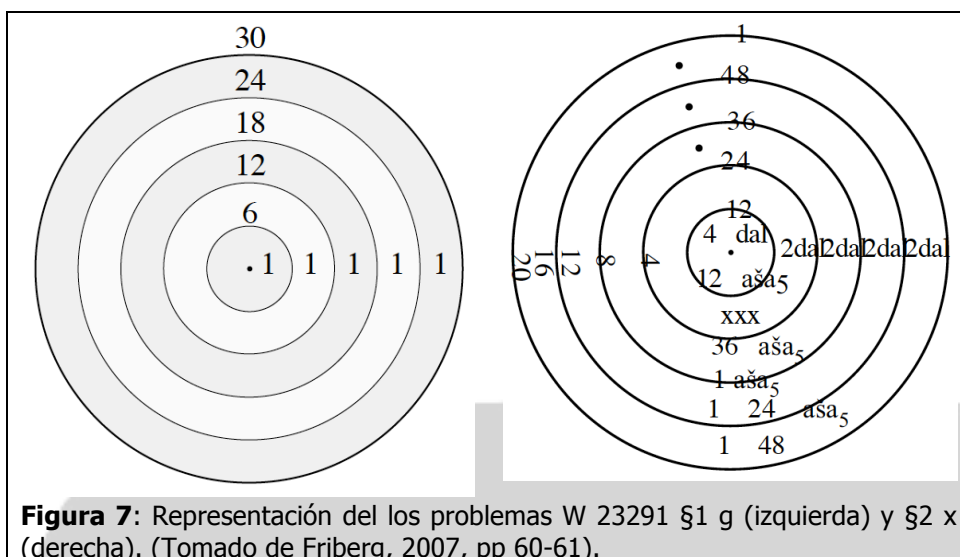
El problema está muy deteriorado y lo que aquí se muestra es una posible interpretación de su contenido. La resolución del problema se basa en la aproximación $f = a - c$. El calculo del área de la luna creciente se obtiene calculando el área del rectángulo que la encierra y restando el área de los dos triángulos laterales, que obtiene como el área de un cuadrado de lado f . Es decir, el área buscada es $A = f \cdot c - f^2$.

W 23291: traducción desde Friberg (2007, pp 59-62)

Esta tablilla, localizada en Uruk, contiene una colección de problemas del periodo neobabilónico (segunda parte del primer milenio AC).

El primer párrafo de la tablilla contiene una colección de problemas del que nos interesa el último, W 23291 §1 g. Le acompaña el diagrama izquierdo de la Figura 7, y el texto dice:

<u>Traducción</u>	<u>Explicación</u>
Un círculo de área 1 bariga 4 pasos, 1 cada uno el decrecimiento baja ¿Cuáles son las circunferencias de la circunferencia exterior a la circunferencia interior? Haz como sigue: Multiplica 1 por 6, 6 aparecerá 6 de [...] 30 resta, 24 el resto la segunda circunferencia. 6 de 24 resta, 18 el resto la tercera circunferencia. 6 de 18 resta, 12 el resto2 la cuarta circunferencia. 6 de 12 resta, 6 el resto 6, la 5ª circunferencia. 6 la circunferencia más interna Termina	$A = 1$ bariga y cuatro círculos internos a 1 rod de distancia ¿Cuanto valen las circunferencias? $1 \cdot 6 = 6$ $l_2 = 30 - 6 = 24$ (habiendo calculado que $l_1 = 30$ rod) $l_3 = 24 - 6 = 18$ $l_4 = 18 - 6 = 12$ $l_5 = 12 - 6 = 6$ $l_5 = 6$



Claramente hay una parte inicial del problema omitida, el cálculo de la circunferencia más exterior y la diferencia entre dos circunferencias consecutivas. El cálculo de la longitud de la circunferencia exterior no aparece en la tablilla, pero se indica que es 30 rod. La bariga era la unidad básica de medida de capacidad, mientras que el rod era una unidad de longitud. La equivalencia era 48 bariga = 1,00,00 rod² (es decir, un cuadrado de 1,00 rod de lado equivale a 48 bariga). Por tanto podemos asumir que, sin explicitarlo, el escriba ha realizado los siguientes cálculos: el área del círculo es, $A = 1 \text{ bariga} = \frac{48 \text{ bariga}}{1,00,00 \text{ rod}^2} 0,05 l^2$, por lo que $l = \sqrt{1,00,00/4} = \sqrt{15,00} = 30 \text{ rod}$, tal y como se indica en la tablilla.

A continuación en la tablilla se indica que para calcular la longitud de un círculo interno basta ir restando 6 unidades al anterior. Si la anchura de cada banda circular es de 1 rod, entonces el diámetro de una circunferencia es dos unidades menor que el diámetro de la circunferencia precedente; y, por tanto, la diferencia entre las dos circunferencias será 2·3 haciendo uso de la constante 3, usada para calcular la circunferencia partir del diámetro. Por tanto, cada circunferencia interna se obtiene restando 6 unidades de la anterior, siendo la circunferencia más exterior igual a 30 rod.

El problema W 23291-x §2 dice:

Traducción

1 (la primera) circunferencia 1 rod
4 pasos, 2 rod cada uno
según decrecen
¿Cuáles es el área?
Multiplica 54 por 2, 1,48
1 (iku) 8 sar el decrecimiento más exterior
Multiplica 42 por 2, 1,24
½ (iku) 34 sar el 2º decrecimiento
Multiplica 30 por 2, 1,00

Explicación

$l_1 = 1 \text{ rod}$
y cuatro círculos internos
a 2 rod de distancia
¿Área de las bandas?
 $\text{Area banda}_1 = 2 \cdot \text{Area semibanda}_1$
 $= 54 \cdot 2 = 1,48 \text{ sar} = 1 \text{ iku y } 8 \text{ sar}$
 $\text{Area banda}_2 = 2 \cdot \text{Area semibanda}_2$
 $= 42 \cdot 2 = 1,24 \text{ sar} = \frac{1}{2} \text{ iku y } 34 \text{ sar}$
 $\text{Area banda}_3 = 2 \cdot \text{Area semibanda}_3$

$\frac{1}{2}$ (iku) 10 sar el 3º decrecimiento
 Multiplica 18 por 2, 36
 36 sar el 4º decrecimiento
 Multiplica 12 por 12, 2,24
 Multiplica 2,24 por 0;05, 12
 12 sar es el 5º y más interno decrecimiento
 Chequealos, todos ellos son 3 (iku).

$= 30 \cdot 2 = 1,00 \text{ sar} = \frac{1}{2} \text{ iku y } 10 \text{ sar}$
 $\text{Area banda}_4 = 2 \cdot \text{Area semibanda}_4$
 $= 18 \cdot 2 = 36 \text{ sar}$
 $A_5 = 0;05 \cdot 12^2 = 0;05 \cdot 2,24$
 $= 12 \text{ sar}$

$12 + 36 + 1,00 + 1,24 + 1,48 = 5,00 \text{ sar} = 3 \text{ iku}$

El ejercicio es ilustrado con un diagrama, que exhibe las longitudes de las cinco circunferencias, sus diámetros y las áreas de las cuatro bandas circulares y del círculo más interno (véase Figura 7 derecha). En la resolución, solo se muestra el cálculo de las áreas de las bandas circulares. Para el cálculo de las circunferencias y diámetros de cada círculo se ha supuesto que $\pi = 3$. Así se tiene que de un círculo al siguiente la longitud decrece en $4\pi \approx 12$ unidades, resultando que los círculos tienen una longitud de 1,00, 48, 36, 24 y 12 unidades; el diámetro de cada uno de los cinco círculos es $l/\pi \approx 0;20 \cdot l$ dando 20, 16, 12, 8 y 4 unidades.

En el texto se muestra el cálculo de las áreas de las bandas circulares, el área del círculo más interior y la del más exterior. Aunque no queda claro, parece que el escriba calcula primero el área de cada semibanda circular como la suma de los arcos que la delimitan, es decir, como la semisuma de las circunferencias que la delimitan. Después duplica este valor para obtener el área de la banda. Por ejemplo, el área de la semibanda más exterior sería $2 \cdot (1,00/2 + 48/2) = 1,48$. El área del círculo más interior se obtiene como $0;05 \cdot 12^2 = 12$ y la del círculo exterior se indica directamente como 3 iku = 5,00 sar y se obtiene de la suma de las áreas previamente calculadas.

El problema W 23291-x §1 pide calcular el área de las tres partes en que queda un círculo con una lenteja inscrita.

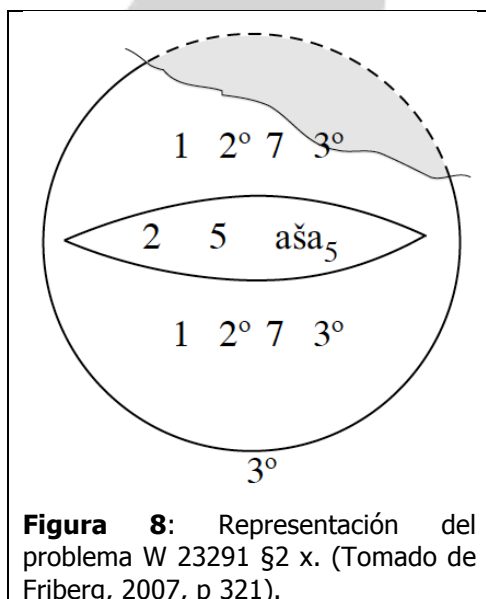


Figura 8: Representación del problema W 23291 §2 x. (Tomado de Friberg, 2007, p 321).

Como único parámetro se da la longitud del semicírculo igual a 30 rod (la circunferencia es 1,00 rod). No se indica si la forma de la lenteja corresponde a un grano de cebada o a un ojo de buey, pero los cálculos en el texto apuntan a que la lenteja está entre estas dos figuras. En el problema se calcula el área de la lenteja central como 2,05, el de cada una de las medialunas como 1,27;30 y el de ambas medialunas como 2,55. (Véase Figura 8)

A partir de las expresiones obtenidas en la

explicación de las constantes en TMS 3, se puede ver que para el grano de cebada su área es, $A_c = 0;30 \cdot d \cdot r$; y para el ojo de buey es, $A_o = 0;45 \cdot d \cdot r$, donde d es el diámetro del círculo que circunscribe las figuras y r el radio. Si la longitud del semicírculo es 30, entonces el diámetro es 20 y el radio 10. Ahora podemos calcular el área de la zona central como la media de ambas áreas o, equivalentemente,

$$A_l = A_c + 0;30(A_o - A_c) = (0;30 + 0;30 \cdot 0;15) \cdot d \cdot r = 0;37,30 \cdot 3,20$$

El resultado es $A_l = 2,05$. Estos son los primeros cálculos que aparecen en el problema.

El cálculo del área de la medialuna se obtiene directamente a partir de la constante 5;50 y el cuadrado de la longitud del arco de medialuna, 30 en el problema. Este sería el algoritmo usual de cálculo de áreas, a partir de una longitud de arco, asumiendo conocida la constante 5;50. De esta forma el área de la medialuna es $30^2 \cdot 5;50 = 15,00 \cdot 5;50 = 1,27;30$ y el doble 2,55, tal y como se obtiene en el problema.

Traducción

[...]

[...]

20 veces 10 es 3,20

Como 10 es $\frac{1}{2}$ de 20

0;07,30, $\frac{1}{2}$ de 0;15

a 0;30 une, entonces 0;37,30

3,20 por 0;37,30 es 2,05

1 iku 25 sar, esto es el área

la medialuna es 30

¿Cuál es su área?

30 veces 30 es 15

multiplica por 5;50 y 1,27;30

$\frac{1}{2}$ iku 37 $\frac{1}{2}$ sar

esto es área de una medialuna.

Por 2,

Multiplica 1,27;30 por 2, entonces 2,55

1 iku 1 ubu 25 sar

es el área de las dos medialunas.

Chequealos, entonces

Todos ellos 3 iku.

Explicación

$$d \cdot r = 20 \cdot 10 = 3,20$$

$$10 = 20/2$$

$$0;07,30 = 0;15/2$$

$$0;30 + 0;07,30 = 0;37,30$$

$$A_l = 3,20 \cdot 0;37,30 = 2,05 \text{ sar}$$

$$2,05 \text{ sar} = 1 \text{ iku y } 25 \text{ sar}$$

$$a = 30$$

$$\text{¿}A\text{?}$$

$$30^2 = 15,00$$

$$A = 5;50 \cdot 15,00 = 1,27;30 \text{ sar}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ iku y } 37 \frac{1}{2} \text{ sar}$$

$$2 \cdot 1,27;30 = 2,55 \text{ sar}$$

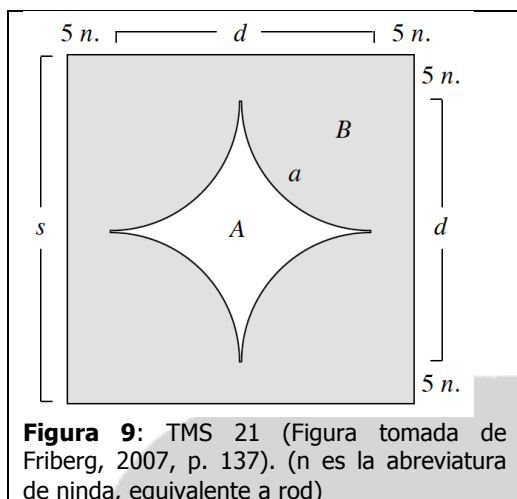
$$= 1 \text{ iku y } 1 \text{ ubu y } 25 \text{ sar}$$

$$\text{La suma de las áreas es}$$

$$2,55 + 2,02 = 5,00 \text{ sar} = 3 \text{ iku}$$

TMS 21: traducción desde Friberg (2007, pp. 137-138)

En la tablilla TMS 21 aparece un cuadrado cóncavo inscrito en medio de otro cuadrado, de forma que cada vértice del cuadrado cóncavo dista 5 rod del punto medio de cada lado del cuadrado exterior (véase Figura 9). Además de esta distancia, otro dato que se da es que el área comprendida entre ambos cuadrados vale 35,00 rod² (área sombreada). Se pide hallar el lado del cuadrado exterior.



50 rod.)

BM 47431: traducción desde Robson (2007, pp 216)

Se trata de una tablilla que contiene un problema matemático de la periodo neobabilónico. Aparecen cuatro círculos tangentes en una disposición 2x2 encerrados por un cuadrado de lado 1,00 y que forman en su interior una ventana de lira. (Véase Figura 10)

El texto indica el área total de la figura (2 ban), que descompone en sus diferentes subfiguras: el área total de los cuatro círculos es 1 ban y 3 sila, el área total de los cuatro triángulos que aparecen en mitad de cada lado del cuadrado es 1 ½ sila, el área total de los cuatro triángulos de las esquinas es 7 ½ ninda, al igual que el área de la ventana de lira interior.

Los cálculos no son difíciles teniendo en cuenta que 1 ban = 6 sila = 60 ninda = 1800 cubos². Así, el área total es de 2 ban = 3600 cubos², el lado del cuadrado que encierra los círculos es 60 cubos y el diámetro de cada círculo es 30 cubos. Usando las constantes del círculo círculo, $l = 3 \cdot d$, $A = 0;05 \cdot l^2$, y el área de los cuatro círculos es $4 \cdot 0;05 \cdot (3 \times 30)^2 = 2700 \text{ cubos}^2 = 1 \text{ ban y } 3 \text{ sila}$. Además, un cuarto de circunferencia será $\frac{3}{4} d = 0;45 \cdot 30 = 22;30$, valor que aparece en la figura pero no es usado en los cálculos.

El área del cuadrado menos las el área de los círculos es $3600 - 2700 = 900 \text{ cubos}^2$ o 3 sila. Por inspección esta área comprende 16 figuras triangulares. La mitad están en las cuatro figuras del centro de cada lado (dobles triángulos), lo que hace un área total de 1 ½ sila; las cuatro piezas en las esquinas del cuadrado suponen un cuarto del total, $\frac{3}{4} \text{ sila} = 7 \frac{1}{2} \text{ ninda}$; y la ventana de lira central otro cuarto, 7 ½ ninda.

Aunque no aparece ninguna figura que ilustre el problema si podemos leer el método de resolución. A partir de constantes, como las que aparecen en la tablilla TMS 3, se puede obtener el transversal largo y el área del cuadrado cóncavo: $d = 1;20 \cdot a$ y $A = 0;26,40 \cdot a^2$. Por otro lado, el lado del cuadrado exterior es $s = d + 2 \cdot 5$. Por tanto $(1;20 \cdot a + 10)^2 = 0;26,40 \cdot a^2 + 35,00$. En el texto se indica que la solución de esta ecuación cuadrática es $a = 30 \text{ rod}$. (Por tanto $d = 40 \text{ rod}$ y $s =$

la altura en cubos (1 rod = 12 cubos), pero en algunos problemas se pide la altura en rod. Si k es la altura en rod, se tiene que,

$$V = 6,40,00 \cdot 0,05 \cdot l^2 h = 6,40,00 \cdot 0,05 \cdot (3d)^2 (12k) = 1,00,00,00 d^2 k \text{ sila (3)}$$

Si prescindimos de los ceros se tiene que $k = V/d^2$, una fórmula muy simple para obtener la altura a partir del diámetro, ambos medidos en rod.

Veamos la aplicación de estas fórmulas, descritas como algoritmos de cálculo por los babilónicos.

El problema 4, del que sólo mostraremos los primeros cálculos, pide obtener las dimensiones de un foso circular y la fuerza de trabajo necesaria para cavarlo.

#4: Traducción	Explicación
Una ciudad	
Rodeada por una circunferencia de 60 rod	$l = 1,00 \text{ rod (de la ciudad)}$
Se proyecta 5 a cada lado y se construye un foso.	$h = 6 \text{ (cubos)}$
La profundidad es 6	$V_f = 1,07,30$
Tomo un volumen de 1,07,30.	Amplia el círculo en 5 rod a cada lado
Proyecta 5 a cada lado	
Encima del foso construyo un dique	
...	
¿Cuál es la base, el tope y la altura?	
...	
Tu:	
Como la circunferencia es 60, ¿cuál es el diámetro?	$d = l/3 = 60/3 = 20 \text{ (de la ciudad)}$
Quita un tercio de 60, el círculo. 20 aparecerá	$2 \cdot 5 = 10 \text{ (incremento diámetro)}$
El diámetro es 20	$d_f = 20 + 10 = 30 \text{ rod}$
Duplica 5, el borde. 10 aparecerá	$l_f = 3 \cdot d_f = 3 \cdot 30 = 1,30 \text{ rod (del foso)}$
Suma 10 a 20, el diámetro. 30 aparecerá	
Triplica el diámetro. Aparecerá 1,30	
La circunferencia del foso en 1,30	
Vuelve	
Eleva al cuadrado 1,30. 2,15,00 aparecerá	$A_f = 0;05 \cdot 1,30^2 = 0;05 \cdot 2,15,00 =$
Multiplica 2,15,00 por 0;05 la contante del círculo	
11;15, el área, aparecerá	
11,15	
Multiplica 11,15 por 6, la profundidad	$V_f = 11,15 \cdot 6 = 1,07,30$
[1,07,30, el volumen, aparecerá]	
Resuelve el recíproco de 0;10, el ratio de trabajo	$1/0;10 = 6$
6 aparecerá	$1,07,30 \cdot 6 = 6,45,00$
Multiplica 6 por 1,07,30, el volumen. Verás 6,45,00	
La fuerza de trabajo es 6,45,00	

El problema 22 pide el cálculo de la altura de un contenedor cilíndrico del cual se sabe la capacidad y el diámetro de la base. La altura se obtiene en rod así que para su cálculo se aplica la fórmula $k = V/d^2$.

	<u>Traducción</u>	<u>Explicación</u>
#22:	Un contenedor, 0;04 el transversal, 1 (sila) de cebada Calcula la altura y la circunferencia l Tu: El transversal al cuadrado, 0;00,16 aparecerá El opuesto de 0,00,16 resuelve, 3,45,00 aparecerá 3,45,00 la altura. Hecho	Cilindro, $d = 0;04 \text{ rod}$ $V = 1,00 \text{ sila}$ $\hat{?}k \text{ y } l?$ $d^2 = 0;04^2 = 0;00,16$ $1,00/0;00,16 = 3,45,00$ $k = 3,45,00 \text{ rod}$

Si recuperamos totalmente las unidades tenemos que $k = 3,45,00/1,00,00,00 = 0;03,45 \text{ rod}$.

Los problemas 34 y 35 dan como parámetros la capacidad del cilindro y la longitud de la base y preguntan por la altura (en cubos). El algoritmo se corresponde con la fórmula que resulta de despejar h de la fórmula (3).

	<u>Traducción</u>	<u>Explicación</u>
#34:	Una cesta, la base [un círculo de] 0;03 rod (Quitamos 1 sila de grano) ¿Qué altura (el nivel de grano) desciende? Tu: [Eleva al cuadrado 0;03], [0;00,09] aparecerá Multiplica 0;00,09 por 0;05, (la constante) del círculo, 0;00,00,45 aparecerá [Resuelve el recíproco de 0;00,00,45], 1,20 aparecerá Multiplica el recíproco de 6,40,00 por 0;00,09 y [0;00,12 aparecerá] Desciende 0;00,12 cubos Hecho	$l = 0;03 \text{ rod}$ $V = 1 \text{ sila}$ $\hat{?}h?$ $l^2 = 0;03^2 = 0;00,09$ $A = 0;05 \cdot l^2 = 0;05 \cdot 0;00,09 = 0;00,00,45$ $1/0;00,00,45 = 1,20$ (<i>realmente es por 1,20</i>) $h = (1/6,40,00) \cdot 1,20 = 0;00,12 \text{ cubos}$
#35:	Una cesta, 1 sila (con) 0;10 rod La longitud, ¿qué vale? Tu: Eleva al cuadrado 0;10, 0;01,40 aparecerá Multiplica 0;01,40 por 0;05, (la constante) del círculo, 0;00,08,20 aparecerá Resuelve el recíproco de 0;00,08,20 7,12 aparecerá Multiplica el recíproco de 6,40,00 por 7,12 y 0;01,04,48, la longitud, aparecerá Hecho	$V = 1 \text{ sila}, l = 0;10 \text{ rod}$ $\hat{?}h?$ $l^2 = 0;10^2 = 0;01,40$ $A = 0;05 \cdot l^2 = 0;05 \cdot 0;01,40 = 0;00,08,20$ $1/0;00,08,20 = 7,12$ $h = (1/6,40,00) \cdot 7,12 = 0;01,04,48 \text{ cubos}$

El problema 14 pide el cálculo de la capacidad de un cono truncado. En la época babilónica no se conocía la fórmula para el cálculo exacto del volumen dicha figura. Para su obtención se reducía este problema al cálculo del volumen de un cilindro de igual altura que el cono y con área de la base la media de la base y el tope del cono truncado. Sean l y l' las longitudes de las circunferencias inferior y superior de cono truncado y sea h su altura. El algoritmo seguido se puede describir por medio de la siguiente fórmula,

$$V = \frac{1}{2}(A_{base} + A_{tope})h = \frac{1}{2}(0;05l^2 + 0;05l'^2)h,$$

que deberá multiplicarse por las constantes adecuadas según sean las unidades de los parámetros y la unidad de capacidad deseada.

<u>Traducción</u>	<u>Explicación</u>
#14: Un manojo de cañas El círculo inferior 0;04 y el superior 0;01, la altura 6 ¿Cuál es el volumen y el diámetro del círculo superior y inferior? Tu: Eleva al cuadrado 0;04 y 0;00,16 aparecerá Multiplica 0;00,16 por 0;05 (la constante) del círculo y 0;00,01,20 aparecerá Eleva al cuadrado 0;02 y 0;00,04 aparecerá. Multiplica 0;00,04 por 0;05 (la constante) del círculo y 0;00,00,20 aparecerá Suma 0;00,01,20 y 0;00,00,20 y 0;00,01,40 aparecerá Rompe por la mitad 0;00,01,40 y 0;00,00,50 aparecerá Multiplica 0;00,00,50 por 6, la altura y 0;00,05 aparecerá el volumen del manojo de cañas. Este es el proceso	Cono truncado $l = 0;04, l' = 0;01, h = 6$ $l^2 = 0;04^2 = 0;00,16$ $A_{base} = 0;05 \cdot 0;00,16 = 0;00,01,20$ $l'^2 = 0;02^2 = 0;00,04$ $A_{tope} = 0;05 \cdot 0;00,04 = 0;00,00,20$ $A_{base} + A_{tope} = 0;00,01,40$ $A_m = 0;00,01,40/2 = 0;00,00,50$ $V = A_m h = 0;00,00,50 \cdot 6 = 0;00,05$

YBC 7997: traducción desde Katz, V. J. *et alia.* (2007, p123).

<u>Traducción</u>	<u>Explicación</u>
Un cilindro. La circunferencia es 1;30 rod Divides la mitad del diámetro en cuatro y entonces elevas al cuadrado 0;15, el cuarto, 0;03,45 aparece. Multiplicas por 12, la altura, así que 0;45, la altura aparece Vuelve Elevas al cuadrado 1;30, la circunferencia, multiplica por 0;05 así que 0;11 ,15 aparece Multiplicas 0;45 y 0;11,15, y multiplicas lo que da por 7;12 así que te da los ladrillos.	$l = 1;30 \text{ rod}$ $k = 0;03,45 \text{ rod}$ $h = 12 \cdot k = 0;45 \text{ cubo}$ $A = 0;05 \cdot l^2 = 0;05 \cdot 1;30^2 = 0;11,15$ $V = A \cdot h = 0;11,15 \cdot 0;45 = 0;08,26,15 \text{ sar}$ $V = 0;08,26,15 \cdot 7;12 = 1;00,45 \text{ sar-ladrillos}$

Los primeros pasos, que permiten obtener la altura del cilindro, son difíciles de interpretar. Parece que la altura en rod es la una cuarta parte de la mitad del diámetro, es decir un octavo del diámetro. Si $l = 1;30 \text{ rod}$, entonces $d = 0;30 \text{ rod}$ y la altura, en rod, es $k = 0;30/8 = 0;03,45 \text{ rod}$. Sin embargo en el texto, aparentemente, de obtiene elevando al cuadrado 0;15. Posteriormente se pasa de rod a cubos multiplicando por 12, lo que permite obtener $h = 0;45 \text{ cubos}$. El resto de pasos no ofrecen dificultad en su interpretación, aunque el problema no da la solución final.

VAT 8522: traducción desde Friberg (2005, p 142)

En esta colección de problemas, el primero pide calcular que porción de la capacidad total de un cono truncado equivale a un tercio, si todo el volumen es equivalente a 3 y un tercio. Para ello primero hay que calcular la capacidad de cono truncado con la información proporcionada. En este problema la información sobre las dimensiones de la base y el tope del cilindro truncado requiere cierta explicación.

Un cono truncado de cedro de 5 rod de alto
1,04 (cilindro) sila el "espesor" en la base, 8 (cilindro) sila el "espesor" de la tapa
Todo el cono truncado vale 3 1/3 minas de plata
¿Cuánto del cono truncado se puede cortar (de la parte superior) por 1/3 minas?

Vimos anteriormente la fórmula para obtener la capacidad de un cilindro en sila cuando la altura se da en rod (véase fórmula 3), $V = 1,00,00,00d^4k \text{ sila}$. Si asumimos que el cilindro es cúbico (igual diámetro que altura) esta expresión se simplifica, quedando $V = (1,00 \cdot d)^3 \text{ sila}$. Nótese el uso del término "espesor" para hacer referencia a una unidad de capacidad al igual que en el problema YBC 8600 analizado en la sección *¿Conocían los babilónicos un valor más preciso de π ?*

En la segunda línea del problema se nos dan dos parámetros, el primero es la capacidad de un cilindro cúbico cuya base fuera la misma que la base del cono truncado; el segundo dato es la capacidad si la base fuera la del tope de cono truncado. Por tanto, si $1,04 = (1,00 \cdot d)^3$ se tiene que $d = 0;04$; mientras que si $8 = (1,00 \cdot d)^3$, entonces $d = 0;02$. Es decir, el diámetro de la base de cono truncado es 0;08 y el del tope 0;02. Además, se nos indica en la primera línea que la altura es 5 rod, equivalente a 1,00 cubo.

El algoritmo de resolución descrito en el problema corresponde a la fórmula,

$$V = 6,40,00 \cdot 0;05 \left(\frac{0;04 + 0;02}{2} \cdot 3 \right)^2 \text{ rod}^2 \cdot 1,00 \text{ cubo} \\ = 6,40,00 \cdot 0;05 \cdot 0;01,21 \cdot 1,00 \text{ sila} = 45,00 \text{ sila}.$$

Como 1/3 minas es un décimo de 3 1/3, por el precio de 1/3 de mina se puede cortar un décimo del volumen total, esto es 4;30 sila.

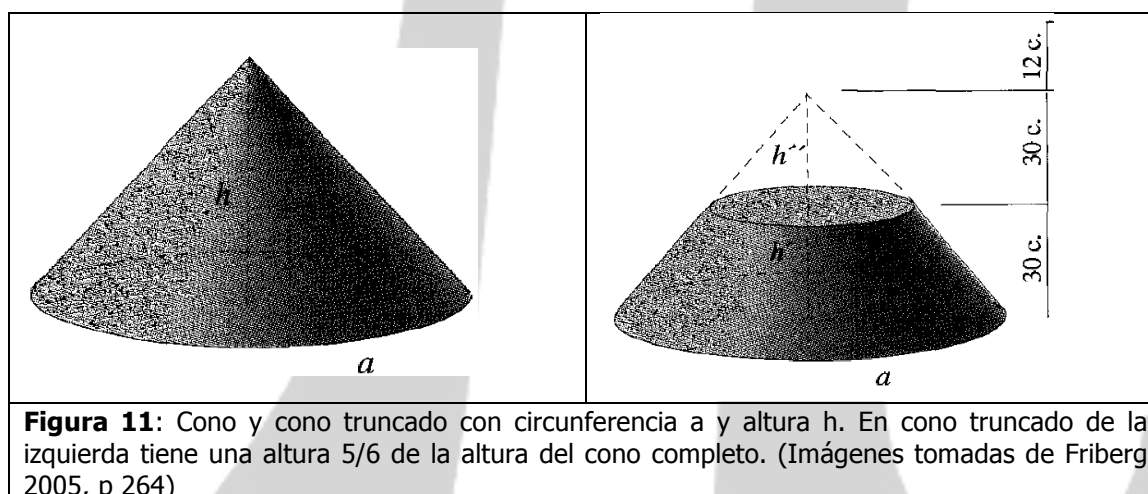
BM 86954: traducción desde Friberg (2005, pp 260-267)

Este texto, formado por tres fragmentos de una gran tablilla, es una colección de problemas centrados principalmente en pirámides, conos y conos truncados. Describiremos aquí los problemas en los que se hace uso de contantes para el

círculo, problemas 4c a 4f, aunque algunos de ellos aparecen tan deteriorados que sólo es posible adivinar su contenido.

Los problemas 4c y 4d piden calcular la circunferencia de la base de un cono. En el primer caso se dispone de la altura y el volumen total, en el segundo problema sólo se da el volumen pero en su resolución se utiliza también un parámetro que de forma tácita se asume que vale lo mismo que en problemas anteriores de la tablilla. Este parámetro, que denominaremos, F , mide el cuadrado de la relación entre la circunferencia y la altura, $F=(l/h)^2$. El término usado, *šà.gal*, para este concepto es usado también en las pirámides con una interpretación diferente.

Los problemas 4e y 4f piden calcular el volumen de un cono truncado. Ambos están muy deteriorados. En el primero se conservan los primeros cálculos realizados pero no la solución; en el segundo sólo se conserva la solución. La principal diferencia entre ambos problemas es la proporción truncada del cono, qué en el primer caso equivale a la mitad de la altura del cono completo y en el segundo se deduce que es un sexto de la altura total (véase Figura 11).



La reconstrucción del primer problema sería:

#c: Un [...] 25,00 el volumen, 1,00 la altura

Tu:

Multiplica 3 por 25 y 1,15 aparecerá

El opuesto a 5 resuelve. Multiplícalo por 1,15

y 15,00 aparecerá

¿Cuál es la raíz? 30 es la raíz. 30 rod la circunferencia.

Hecho.

$V = 25,00$ sar y $h = 1,00$ cubos

$A = 3 \cdot V/h = 3 \cdot 25,00/1,00 = 1,15$ rod

$l^2 = (1/0;05) \cdot A = 12 \cdot 1,15$

$= 15,00$ rod²

$l = \sqrt{15,00} = 30$ rod

El texto del problema #d está completamente preservado excepto por el nombre del sólido considerado. Como en los problemas #a-c la figura era un cono, se deduce que en este problema también lo es. Además, se asume tácitamente que $F = (l/h)^2 = 0;15$ por haberse usado este valor en problemas previos.

#d: Un [cono]
 25,00 el volumen [15 šà.gal]. ¿Cuál es la circunferencia?
 Tu:
 Triplica 25,00 y 1,15,00 aparecerá.
 El opuesto de 5, la constante, 12 aparecerá
 Multiplica 12 por 1,15,00 y 15,00,00 aparecerá.
 Gira
 El opuesto de 0;15, el šà.gal, 4 aparecerá
 Multiplica 15,00,00 por 4, 1,00,00,00 aparecerá.
 ¿Cuál es la raíz (cúbica) de 1,00,00,00? 1,00 es la raíz (cúbica), la altura.
 0;15, el šà.gal, duplica, 0;30 aparecerá
 Multiplica 0;30 por 1,00, la altura, 30 aparecerá
 El procedimiento

En este problema el único parámetro dado es $V = 25,00$ sar. Así, $hl^2 = (1/0;05) \cdot 3 \cdot V = 12 \cdot 1,15,00 = 15,00,00$ sar. $F = (l/h)^2 = 0;15$ por tanto, $1/F = 1/0;15 = 4$ y $h^3 = hl^2/F = 4 \cdot 15,00,00 = 1,00,00,00$ cubo³. Por tanto $h = 1,00$ cubos.

El problema finaliza realizando un cálculo incorrecto: obtiene l/h como $2 \cdot F$, en lugar de $\sqrt{F}$. Como ambos cálculos coinciden en este caso y son iguales 0;30, se obtiene la longitud de la circunferencia base correctamente como $l = 0;30 \cdot h = 30$ rod.

Los problemas 4e y 4f versan sobre conos truncados. En el primer caso se conservan bastante bien la pregunta y los primeros cálculos y queda claro que el sólido es un cono truncado. Veamos una reconstrucción del texto,

#e: [...]
 30, la circunferencia
 1,00 la altura, 25,00 el volumen. 2 ½ rod abajo
 ¿Cuál es el volumen (inferior)?
 Tu:
 El opuesto de 1,00, la altura, obtén. 0;01 aparecerá
 Por 30, la circunferencia, multiplica, 0;30 aparecerá.
 0;30 a 30 [...] eleva, 15 aparecerá.
 15 de 30, la circunferencia, resta, 15 aparecerá
 ¿Cuál es el volumen (inferior)?
 30, la circunferencia inferior, al cuadrado, 15,00 aparecerá.
 Por 0;05, la constante, multiplica, 1,15 aparecerá.
 15, la circunferencia superior, al cuadrado, 3;45 aparecerá.
 3;45 por 0;05 la constante multiplica, 18;45 aparecerá
 1,15 y 18;45 suma, 1,33;45 aparecerá.
 ½ de 1 33 45 rompe, 46;52,30 aparecerá.
 30 y 15 suma, 45 ves. ½ de 45 rompe, 22;30 aparecerá.
 22;30 al cuadrado, 8,26;15 aparecerá.
 8,26;15 por 0;05, la constante, multiplica, 42,11;15 aparecerá
 [...]

Los parámetros del problema son el volumen $V = 25,00$ sar (que no es usado), la altura del cono sin trugar, $h = 1,00$ cubos y la altura del cono superior (h') eliminado para obtener el cono truncado, $2 \frac{1}{2}$ rod = 30 cubos.

El primer paso consiste en calcular la circunferencia de la cara superior del cono truncado, l' , a partir de la relación $l'/l = (h - h')/h$ como,

$$l' = l - l \cdot \frac{h'}{h} = 30r - \frac{30r}{1,00c} 30c = 30 - 15 = 15 \text{ rod}.$$

A continuación calcula las áreas de las circunferencias inferior y superior,

$$A = 0;05l^2 =;05 \cdot 30^2 = 0;05 \cdot 15,00 = 1,15 \text{ rod}^2$$

$$A' = 0;05l'^2 =;05 \cdot 15^2 = 0;05 \cdot 3,45 = 18;45 \text{ rod}^2$$

Después calcula la media aritmética de estas dos áreas, el área media,

$$A_m = \frac{A+A'}{2} = \frac{1,15+18;45}{2} = 46;52,30 \text{ rod}^2.$$

Los siguientes cálculos (muy deteriorados) calculan el área del medio (área del círculo cuya longitud es la media de las longitudes de la base y el tope) como:

$$A_M = 0;05 \left(\frac{l+l'}{2} \right)^2 = 0;05 \left(\frac{30+15}{2} \right)^2 = 0;05(22;30)^2 = 0;05 \cdot 8,26;15 = 42;11,15 \text{ rod}^2.$$

El resto del algoritmo ha desaparecido. Posiblemente los siguientes cálculos consistían en obtener el volumen medio y el volumen del medio como,

$$V_m = A_m h' = 46;52,30 \cdot 30 = 23,26;15 \text{ sar}$$

$$V_M = A_M h' = 42;11,15 \cdot 30 = 21,05;37,30 \text{ sar},$$

para finalmente obtener el volumen del cono truncado como se observa en otros problemas:

$$V' = V_M + \frac{V_m - V_M}{3} = 21,52;30 \text{ sar}$$

Del problema BM 9695-4f sólo se conserva la solución,

#f: [...]aparecerá
 [...] multiplica,
 [...] 29,51;40 aparecerá
 [...] por 1,00 la altura multiplica, 29,51;40 aparecerá, el volumen.

A partir de estos datos podemos asumir que el problema era equivalente al anterior, pero ahora la relación entre la altura del cono superior eliminado y la del cono completo era 1/6.

Haddad 104: traducción desde Katz, V. J., *et alia.* (2007, pp 123 - 125)

Esta tablilla, localizada en Me-Turan, contiene una colección de problemas del periodo paleobabilónico. Los seis primeros problemas tratan de cálculo de volúmenes de almacenes cilíndricos o cónicos (truncados). En todos ellos el procedimiento es similar y se basa en las fórmulas ya vistas.

- (i) El proceso de un cilindro
 Su diámetro es 0;05 rod o un cubo
 ¿Cuál es su capacidad?
 Tu:
 haz la altura igual al diámetro
 Haz 0;05 en altura y 1 aparecerá
 Triplica 0;05, el diámetro, así que 0;15 aparecerá
 La circunferencia del cilindro es 0;15
 Eleva al cuadrado 0;15 y 0;03,45 aparecerá
 Multiplica 0;03,45 por 0;05, la constante del círculo,
 y 0;00,18,45, el área aparecerá
 Multiplica 0;00,18,45 por 1, la altura,
 y 0;00,18,45, el volumen, aparecerá
 Multiplica 0;00,18,45 por 6,00,00 (la constante)
 de almacenamiento y 1,52;30 aparecerá
 El cilindro contiene 1 (bariga) 5 (ban) 2 ½ sila de grano
 Este es el procedimiento.
- $d = 0;05 \text{ rod}$
 $\hat{V}?$
 $h' = d = 0;05 \text{ rod}$
 $h = 12 \cdot 0;05 = 1 \text{ cubo}$
 $l = 3 \cdot d = 0;15$
 $l^2 = 0;15^2 = 0;03,45$
 $A = 0;05 \cdot 0;03,45$
 $= 0;00,18,45$
 $V = A \cdot h = 0;00,18,45 \cdot 1$
 $= 0;00,18,45 \text{ sar}$
 $V = 6,00,00 \cdot 0;00,18,45 = 1,52;30 \text{ sila}$
- (ii) Un cono truncado
 Su fondo es 0;05, su tope 0;01,40, es 0;30 rod de alto
 ¿Cuánto grano contiene?
 Tu:
 Haz 0;30, la altura del cono truncado, en altura y 6 aparece
 Vuelve
 Suma y rompe 0;05, el fondo, y 0;01,40 el tope,
 y 0;03,20 aparecerá
 Triplica 0;03,20 y 0;10 aparecerá, la circunferencia
 Eleva al cuadrado 0;10 y 0;01,40 aparecerá
 Multiplica 0;01,40 por 0;05, la constante del círculo,
 así que 0;00,08,20, el área aparecerá
 Multiplicas 0;00,08,20 por 6, la altura del cono,
 y 0;00,50, el volumen, aparecerá
 Multiplica 0;00,50 por 6,00,00 (la constante)
 de almacenamiento y 5,00 aparecerá
 El cono truncado contiene 1 gur de grano.
- $d_f = 0;05, d_t = 0;01,40, h' = 0;30 \text{ rod}$
 $\hat{V}?$
 $h = 12 \cdot 0;30 = 6 \text{ cubos}$
 $d_m = (d_f + d_t)/2 =$
 $(0;05 + 0;01,40)/2 = 0;03,20$
 $l = 3 \cdot 0;03,20 = 0;10$
 $l^2 = 0;10^2 = 0;01,40$
 $A = 0;05 \cdot 0;01,40$
 $= 0;00,08,20$
 $V = A \cdot h = 0;00,08,20 \cdot 6$
 $= 0;00,50 \text{ sar}$
 $V = 6,00,00 \cdot 0;00,50 = 5,00 \text{ sila}$

(iii) Un cono truncado Su fondo es 0;05, su tope 0;01,40, es 5 rod de alto Su precio es 1 talento de plata Quito 1 mina de plata, bien de arriba, bien de abajo, ¿Qué queda? Tu: Haz 5, la altura del cono, en profundidad y 1,00 aparecerá Vuelve: Suma y rompe 0;05, el fondo, y 0;01,40 el tope, y 0;03,20 aparecerá Triplica 0;03,20 y 0;10 aparecerá, la circunferencia Eleva al cuadrado 0;10 y 0;01,40 aparecerá Multiplica 0;01,40 por 0;05, la constante del círculo, así que 0;00,08,20, el área aparecerá Multiplica 0;00,08,20 por 1,00, la altura del cono, y 0;08,20, el volumen, aparecerá Multiplicas 0;08,20 por 6,00,00 (la constante) de almacenamiento y 50,00 aparecerá sila El cono contiene 10 gur de grano.	$d_f=0;05$, $d_t=0;01,40$, $h'=5$ rod precio $V = 1$ talento $h = 12 \cdot 5 = 1,00$ cubos $d_m = (d_f + d_t)/2 =$ $(0;05+0;01,40)/2=0;03,20$ $l = 3 \cdot 0;03,20 = 0;10$ $l^2 = 0;10^2 = 0;01,40$ $A = 0;05 \cdot 0;01,40$ $= 0;00,08,20$ $V=A \cdot h= 0;00,08,20 \cdot 1,00$ $= 0;08,20$ sar $V = 0;08,20 \cdot 6,00,00 = 50,00$
1 gur de grano es 1 talento de plata Si 50,00 de grano es 1 talento de plata, ¿Cuánto es una mina de plata? Encuentra el recíproco de 1 mina de plata y 1 aparecerá Multiplica 1 por 1,00, un talento de plata, y 1,00 aparecerá Encuentra el recíproco de 1,00 y 0;01 aparecerá Multiplica 0;01 por 50,00, el grano, y 50 parecerá 5 (ban) de grano es la capacidad de 1 mina de plata Vuelve.	(1 talento = 1,00 mina) $1/1$ $= 1$ $1 \cdot 1,00$ 1,00 minas $1/1,00 = 0;01$ $0;01 \cdot 50,00 = 50$.
Pregunta, si un cono cuyo fondo es 0;05 contiene 5 (ban) de grano, ¿cuál es su altura? Encuentra el recíproco de 6,00,00, la contante de almacenamiento y 0;00,00,10 aparecerá Multiplica 0;00,00,10 por 50, el grano y 0;00,08,20 aparecerá Guarda en tu cabeza 0;00,08,20 Vuelve Triplica 0;05, el fondo, y 0;15, la circunferencia aparecerá Eleva al cuadrado 0;15 y 0;03,45 aparecerá Encuentra el inverso de 0;03,45 y 16 aparecerá Multiplica 16 por 0;00,08,20 lo que guardabas en la cabeza y 0;02,13,20 aparecerá Tu subes 0;02,13,20 la longitud del cono y tu cortas y entonces lo das por 1 mina de plata Vuelve	$d = 0;05$ $V = 5$ ban ¿h'? $1/6,00,00$ $= 0;00,00,10$ $V=0;00,00,10 \cdot 50= 0;00,08,20$ $l = 3 \cdot d = 3 \cdot 0;05 = 0;15$ $l^2 = 0;15^2 = 0;03,45$ $1/l^2 = 1/0;03,45 = 16$ $h' = V/l^2 = 16 \cdot 0;00,08,20$ $= 0;02,13,20$ rod

Obtén el volumen

Haz 0;02,13,20 en altura y 0;26,40 aparecerá

Triplica 0;05, el fondo, y 0;15, la circunferencia, aparecerá

Eleva al cuadrado 0;15 y 0;03,45 parecerá

Multiplica 0;03,45 por 0;05, la constante del círculo

y 0;00,18,45, el área, aparecerá

Multiplica 0;00,18,45 por 0;26,40, la altura y

0;00,08,20 el volumen aparecerá

Multiplica 0;00,08,20 por 6,00,00, la constante

de almacenamiento y 50 aparecerá.

La capacidad de una mina de plata es 5 ban de grano.

$$h = 12 \cdot h' = 12 \cdot 0;02,13,20 = 0;26,40$$

$$l = 3 \cdot d = 3 \cdot 0;05 = 0;15$$

$$l^2 = 0;15^2 = 0;03,45$$

$$A = 0;05 \cdot l^2 = 0;05 \cdot 0;03,45$$

$$= 0;00,18,45$$

$$V = A \cdot h = 0;00,18,45 \cdot 0;26,40$$

$$= 0;00,08,20 \text{ sar}$$

$$V = 0;00,08,20 \cdot 6,00,00$$

$$= 50 \text{ sila}$$

Corta desde arriba

Encuentra el recíproco de 1 mina de plata

y 1 aparecerá

Multiplica 1 por 1,00, un talento de plata, y

1,00 aparecerá

Encuentra el recíproco de 1,00 y 0,01 aparecerá

Multiplica 0;01 por 50,00, el grano, y 50 parecerá

1 mina de plata es 5 (ban) de volumen

$$1/1$$

$$= 1$$

$$1 \cdot 1,00$$

$$1,00 \text{ minas}$$

$$1/1,00 = 0;01$$

$$0;01 \cdot 50,00 = 50.$$

Si 50 (sila) de volumen es un mina de plata

y 0;01,40 es el tope

¿cuánto habría que descender para quitar 1 mina de plata?

Encuentra el recíproco de 6,00,00, la contante de

almacenamiento y 0;00,00,10 aparecerá

Multiplica 0;00,00,10 por 50, el grano y 0;00,08,20 aparecerá

Guarda en tu cabeza 0;00,08,20

Vuelve

Triplica 0;01,40, el fondo, y 0;05, la circunferencia aparecerá

Eleva al cuadrado 0;05 y 0;00,25 aparecerá

Encuentra el recíproco de 0;00,25 y 2,24 aparecerá

Multiplica 2,24 por 0;00,08,20 lo que guardabas en la cabeza

y 0;20 aparecerá

Tu bajas 0;20, 4 cubos, y cortas y entonces lo das por

1 mina de plata

Vuelve

$$V = 50 \quad d = 0;01,40$$

$$\text{¿}h'?$$

$$1/6,00,00$$

$$= 0;00,00,10$$

$$V = 0;00,10 \cdot 50 = 0;00,08,20$$

$$l = 3 \cdot d = 3 \cdot 0;01,40 = 0;05$$

$$l^2 = 0;05^2 = 0;00,25$$

$$1/l^2 = 1/0;00,25 = 2,24$$

$$h' = V/l^2 = 2,24 \cdot 0;00,08,20$$

$$= 0;20 \text{ rod}$$

Obtén el volumen

Haz 0;20 la altura del cono y la altura 4 aparecerá

Triplica 0;01,40, el tope, y 0;05, la circunferencia, aparecerá

Eleva al cuadrado 0;05 y 0;00,25 parecerá

Multiplica 0;00,25 por 0;05, la constante del círculo

y 0;00,02,05, el área, aparecerá

Multiplica 0;00,02,05 por 4, la altura y

0;00,08,20 el volumen aparecerá

Multiplica 0;00,08,20 por 6,00,00, la constante

de almacenamiento y 50 aparecerá.

El cono tiene 5 ban de grano.

Este es el procedimiento

$$h = 12 \cdot h' = 12 \cdot 0;20 = 4$$

$$l = 3 \cdot d = 3 \cdot 0;01,40 = 0;05$$

$$l^2 = 0;05^2 = 0;00,25$$

$$A = 0;05 \cdot l^2 = 0;05 \cdot 0;00,25$$

$$= 0;00,02,05$$

$$V = A \cdot h = 0;00,02,05 \cdot 4$$

$$= 0;00,08,20 \text{ sar}$$

$$V = 0;00,08,20 \cdot 6,00,00$$

$$= 50 \text{ sila}$$

(iv) El procedimiento de un sila (recipiente). El diámetro es 0;01 (rod), 6 dedos ¿Cuál es la altura para que el volumen sea 1 sila? Procede Encuentra el recíproco de 6,00,00, la constante de almacenamiento, y 0;00,00,10 aparecerá Vuelve Triplica 0;01, el diámetro, y 0;03, la circunferencia aparecerá Eleva al cuadrado 0;03 y 0;00,09 aparecerá Encuentra el recíproco de 0;00,09 y 6,40 aparecerá Multiplica 6,40 por 0;00,00,10 y 0;01,06,40 aparecerá La altura es 0;01,06,40 (rod) seis dedos y dos tercios de dedo	Cilindro $d = 0;01$ Si $V = 1$, ¿h? $1/6,00,00 = 0;00,00,10$ $l = 3 \cdot d = 3 \cdot 0;01 = 0;03$ $l^2 = 0;03^2 = 0;00,09$ $1/l^2 = 1/0;00,09 = 6,40$ $h' = 6,40 \cdot 0;00,00,10 = 0;01,06,40 \text{ rod}$
La altura 0;01,06,40 y el diámetro 0;01 ¿Cuánto grano tiene el sila (recipiente) Haz 0;01,06,40 en altura y 0;13,20 (cubos) aparecerá Triplica 0;01, el transversal largo, y 0;03, la circunferencia aparecerá Eleva al cuadrado 0;03 y 0;00,09 aparecerá Multiplica 0;00,09 por 0;05 la constante del círculo y 0;00,00,45, el área, aparecerá Multiplica 0;00,00,45 por 0;13,20, la altura, y 0;00,00,10, el volumen, aparecerá Multiplica 0;00,00,10 por 6,00,00, la constante de almacenamiento y 1 sila de grano aparecerá	$h' = 0;01,06,40 \text{ rod}$ y $d = 0;01$ ¿V? $h = 12 \cdot h' = 12 \cdot 0;01,06,40 = 0;13,20$ $l = 3 \cdot d = 3 \cdot 0;01 = 0;03$ $l^2 = 0;03^2 = 0;00,09$ $A = 0;05 \cdot l^2 = 0;05 \cdot 0;00,09 = 0;00,00,45$ $V = A \cdot h = 0;00,00,45 \cdot 0;13,20 = 0;00,00,10 \text{ sar}$ $V = 0;00,00,10 \cdot 6,00,00 = 1 \text{ sila}$
Si el volumen es 1 sila, la altura 0;01,06,40, ¿cuál es el diámetro del círculo? Haz 0;01,06,40 en altura y 0;13,20 (cubos) aparecerá Encuentra el recíproco de 0;13,20 y 4;30 aparecerá Vuelve Encuentra el recíproco de 0;05, la constante del círculo y 12 aparecerá Encuentra el recíproco de 6,00,00, la constante de almacenamiento y 0;00,00,10 aparecerá Multiplica 0;00,00,10 por 12 y 0;00,02 aparecerá Multiplica 0;00,02 por 4;30 y 0;00,09 aparecerá Obtén su raíz y 0;03 aparecerá La circunferencia del sila (recipiente) es 0;03 Toma un tercio de 0;03 y 0;01, el diámetro aparecerá Este es el procedimiento	¿d? $V = 1 \text{ sila}$, $h' = 0;01,06,40 \text{ rod}$ $h = 12 \cdot h' = 12 \cdot 0;01,06,40 = 0;13,20$ $1/h = 1/0;13,20 = 4;30$ $1/0;05 = 12$ $1/6,00,00 = 0;00,00,10$ $0;00,00,10 \cdot 12 = 0;00,02$ $0;00,02 \cdot 4;30 = 0;00,09$ $\sqrt{0;00,09} = 0;03$ $l = 0;03$ $d = l/3 = 0;01$

Bibliografía

- Bruins, E. M. y Rutten, M. (1961), *Textes mathématiques de Suse*, Paul Geuthner, Paris, Francia.
- Fowler, D. y Robson, E. (1998), *Square Root Approximations in Old Babylonian Mathematics: YBC 7289 in Context*, *Historia Mathematica* vol 25, pp. 366–378 (article N°. HM982209)
- Friberg, J. (2005) Unexpected links between Egyptian and Babylonian mathematics, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapur.
- Friberg, J. (2007), *Amazing traces of a Babylonian origin in Greek mathematics*, World Scientific Publications Co. Pte. Ltd., Singapur.
- Katz, V.J., Imhausen, A., Robson, E., Dauben, J. W., Plofker, K. y Berggren, J. L. (2007) *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, and Islam. A Sourcebook*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, EE.UU.
- Neugebauer, O. y Sachs, A. (1945), *Mathematical Cuneiform Text*, American Oriental Series, vol 24, American Oriental Society, New Haven, Connecticut.
- Neugebauer, O. y Struve, W. (1929), *Über die Geometrie des Kreises in Babylonien, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abteilung B: Studien 1*, 81-92.
- Powell M. A. (1984). Late Babylonian surface mensuration: a contribution to the history of Babylonian agriculture and arithmetic, *Archiv für Orientforschungen* 31, 32-66.
- Robson, E. (1999) *Mesopotamian Mathematics 2100–1600 BC: Technical Constants in Bureaucracy and Education* (Oxford Editions of Cuneiform Texts, 14), Oxford: Clarendon Press.
- Robson, E. (2000) Mesopotamian mathematics: some historical background, en V.J. Katz (ed.), *Using History to Teach Mathematics*, Washington DC: Mathematical Association of America, 149–158,
- Robson, E. (2007) The Long Career of a Favorite Figure: The *apsamikku* in the Neo-Babylonian Mathematics, en M. Ross (ed.), *From the Banks of the Euphrates: Studies in Honor of Alice Louise Slotsky*, Winona Lake: Eisenbrauns, 2007, 209–224
- Roger, C. y de Jòdar, J. (2004) *Los matemáticos de Babilonia*, Ediciones Bellaterra, Barcelona, España.
- Smeur, A. J. E. M. (1969) On the value equivalent to π in ancient mathematical texts. A new interpretation, *Archive for History of Exact Sciences* 4(6), 1432-0657. Springer Berlin.