π en el Egipto de los faraones

Iván Arribas (ivan.arribas@uv.es)

INTRODUCCIÓN

Se dispone de muy pocos documentos matemáticos del Antiguo Egipto, sobre todo cuando se compara con la abundancia de tablillas con contenido matemático en Mesopotamia durante el mismo periodo. Esta carencia de información hizo pensar a los primeros investigadores que los egipcios eran malos matemáticos. Sin embargo, hay indicadores que solo se pueden dar si aceptamos un elevado desarrollo de las matemáticas y, simultáneamente, se dan múltiples factores sociales y ambientales que justifican la falta de datos.

Ya en el Imperio Antiguo (tercer milenio AEC) la sociedad egipcia alcanzó un elevado desarrollo que sólo era posible gracias a un complejo aparato administrativo encargado de contabilizar los productos almacenados, gestionar su reparto entre trabajadores, distribuir el trabajo… Por otro lado, la magnitud de las obras arquitectónicas acometidas (las grandes pirámides son del Imperio Antiguo) sólo se puede explicar asumiendo un elevado dominio de las matemáticas por parte de los arquitectos y constructores de la época. A estos argumentos hay que añadir que simplemente la gestión de las tareas necesarias para la construcción de una gran pirámide y la coordinación logística (turnos de trabajo, alimentación…) exige un alto nivel técnico en matemáticas. En consecuencia, hay evidencias más que suficientes para pesar que en el Antiguo Egipto el desarrollo matemático era muy superior al que se deduce de la pobre información que nos ha llegado.

El principal material de escritura de la época era el papiro, sobre el que se escribía con una caña impregnada en tinta, confeccionado a partir de la planta del mismo nombre y que requiere de un ambiente muy seco para su conservación. Sin embargo, las principales ciudades del antiguo Egipto se ubicaban en las orillas del Nilo, donde la preservación del papiro es imposible. No es sorprendente, por tanto, que algunos de los principales hallazgos se hayan realizado en el desierto. Además, muchas de las actuales ciudades de Egipto se ubican sobre las antiguas metrópolis, lo que dificulta las labores de excavación de potenciales yacimientos, y ha tenido como consecuencia la destrucción de antiguos papiros. Podemos concluir que la falta de documentos matemáticos no es en absoluto consecuencia de un pobre desarrollo en esta disciplina.

Este trabajo refleja mis propias limitaciones intelectuales, y aunque intento entender las matemáticas de tantas culturas antiguas como me es posible, es difícil ser solvente en todas ellas. El trabajo refleja mis intereses, mis puntos fuertes y mis punto débiles. No es una disertación académica ni exhaustiva, sino una obra de lectura, no de consulta, pero no renuncia al rigor que se echa en falta en otras obras divulgativas. Está dirigida a toda persona interesada por la evolución del concepto de π y que quiere profundizar en su conocimiento escapando de los tópicos y errores usuales. No pretendo condensar todo el conocimiento matemático de una periodo de dos mil años, sólo aquel directamente relacionado con mis intereses. Soy responsable de cualquier error o mala interpretación.

BREVE RESEÑA HISTÓRICA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA ÉPOCA DE LOS FARAONES

Primeros textos matemáticos del Periodo Predinástico

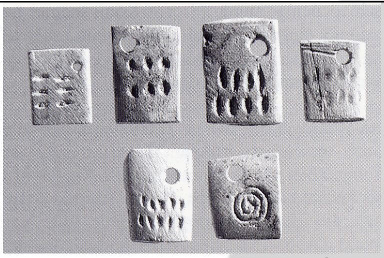

Figura 1: Representación de números en etiquetas de la tumba Uj.

El texto más antiguo que se ha encontrado con representaciones numéricas data de poco antes de la unificación de Egipto (alrededor del 3000 AEC) y fue localizado en la tumba Uj en Abidós. Consiste en una serie de etiquetas de hueso y marfil con un agujero (que sugiere que estaban atadas a algún producto perecedero en la tumba) y una cantidad numérica grabada usando un sistema numérico decimal sin posicionamiento.[1]

Las matemáticas durante el Imperio Antiguo

El Imperio Antiguo abarca gran parte del tercer milenio AEC. En este periodo se produce una explosión cultural, arquitectónica y un fuerte desarrollo de la administración que sólo se pueden entender aceptando un alto desarrollo de las matemáticas.

Aunque no hay evidencia escrita de este desarrollo hay otro tipo de evidencias. Por ejemplo, en la mastaba de Meidum, alrededor de sus esquinas, bajo en nivel del suelo, aparecen construidos cuatro muros hechos con ladrillo de barro y con forma de L. En estos muros se pueden ver una serie de diagramas que indican

[1] En este sistema numérico cada potencia de 10 hasta 1 millón era representado con un signo diferente. La simple repetición de signos, de forma yuxtapuesta, permitía representar cualquier número.

la pendiente de los lados de la mastaba. La unidad de pendiente era el *sqd* que media el desplazamiento horizontal (en palmos) por cada unidad de desplazamiento vertical (en cubos). Aunque sólo hasta el periodo del Imperio Medio tendremos evidencia en textos de este concepto, su uso ya se inicia en el Imperio Antiguo.

También, hay evidencia del uso de varios sistemas métricos y de su evolución durante este periodo hasta el periodo del Imperio Medio.

Las matemáticas durante el Imperio Medio

De este periodo (primera mitad del segundo milenio AEC) datan los principales textos matemáticos encontrados, papiros Rhind, Berlín, Moscú, Kahun, *Leather Roll*, etc. Los textos matemáticos pueden clasificarse, por su contenido, en tablas numéricas o en problemas. Posiblemente estos textos fueron realizadas por maestros escriba con la intención de servirse de ellos durante la preparación de futuros escribas. Las matemáticas eran un elemento clave en su formación dado que les proveía de una herramienta indispensable para realizar sus tareas administrativas y de organización. Sin embargo, el uso educacional y práctico de los textos hace imposible aprender de ellos como los egipcios desarrollaron su matemática.

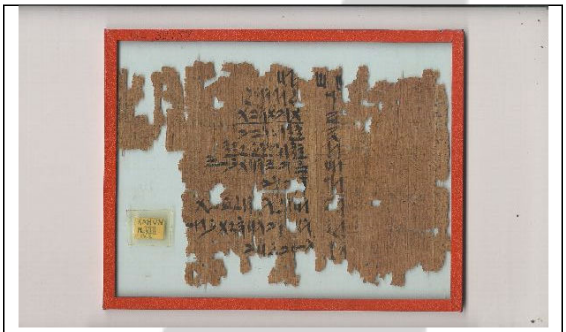

Figura 2: Fragmento del papiro Kahun (o Lahun). Muestra una tabla 2÷N.

Las tablas numéricas incluyen tablas de operaciones y tablas de conversión de medidas. Entre las primeras podemos destacar las tablas 2÷N donde se indica el resultado de multiplicar por dos las fracciones de la unidad impares, o el *Leather Roll* que contiene 26 sumas de fracciones de la unidad que suman una unidad; entre las tablas de conversión de unidades destacamos el problema 81 del papiro Rhind que relaciona pares de unidades de medida de volumen diferentes.

El total de problemas matemáticos encontrados alcanza el centenar y en su mayoría vienen de dos papiros, Rhind y Moscú, donde los problema están organizados según su nivel de dificultad. Cada problema consta de una serie de partes bien diferenciadas: un título en color rojo que permitía identificar el tipo de problema, por ejemplo Método de calcular una pirámide. El color rojo además facilitaba identificar el inicio de cada problema; después se dan los datos del problema, siempre específicamente numéricos, y le sigue la cuestión a resolver. A continuación vienen las instrucciones para resolver el problema. Estas son una serie de frases, usualmente una por operación aritmética (los egipcios no usaba símbolos matemáticos).[2] El problema termina enunciando el resultado. (Véase Figura 3)

Figura 3: Fragmento del papiro Rhind.

Las matemáticas durante el Imperio Nuevo y posteriores

El Imperio Nuevo se inicia aproximadamente a mitad del segundo milenio AEC y finaliza hacia el final del milenio. No se han encontrado documentos matemáticos relevantes, al menos en comparación con los correspondientes al Imperio Medio. La mayor fuente proviene de las excavaciones en Deir el Medina (ubicada al otro lado del Nilo, frente a Luxor) donde se han hallado textos sobre reparto de raciones, planos de construcción y una tablilla de cerámica con un ejercicio de multiplicación de grandes números.

Durante el primer milenio (que abarca los periodos Intermedio, Tardío y Helenístico), aparecen nuevos documentos matemáticos. Estos están escritos en demótico en lugar de hierático y muestran un *corpus* manifiestamente diferente que sugiere el contacto entre los matemáticos egipcios y los matemáticos mesopotámicos y griegos. Se observa que muchos de los cálculos están hechos en base sexagesimal aunque los datos y el resultado final se escriban en base decimal.

[2] Las operaciones conocidas por los egipcios eran suma, resta, multiplicación, división, calculo de la mitad, invertir, elevar al cuadrado y raíces cuadradas.

FIGURAS CIRCULARES

La concepción egipcia del círculo

Como es habitual en las culturas antiguas, lo que nos ha llegado del antiguo Egipto (en concreto del Imperio Medio) es una serie de reglas de cálculo con fines prácticos y sin ningún desarrollo teórico. A esto hay que añadir la escasa información que nos ha llegado relacionada con figuras circulares, lo que nos impide saber con certeza cual era la conceptualización que se tenía del círculo. Casi todos los problemas aplican una regla para el cálculo del área de un círculo a partir del diámetro y no se ha conservado ningún texto con el cálculo de la circunferencia.[3]

Ante esta falta absoluta de textos de la época sobre figuras circulares los investigadores se han enfrentado de muy diferentes formas. Algunos muestran sus reservas a la hora de realizar cualquier tipo de especulación mientras que otros utilizan la mínima ambigüedad en la especificación o resolución de un problema para desarrollar diferentes teorías sobre el método de cálculo del área de un circulo o especular sobre como calculaban los egipcios el área de una semi-esfera (algo que de acuerdo con los conocimientos actuales de las matemáticas del Antiguo Egipto estaba aun muy lejos de sus posibilidades). En concreto, se ha escrito mucho sobre el problema 48 del papiro Rhind como una explicación de la regla para el cálculo del área de un círculo, aproximándolo al área de un octógono irregular; mayor controversia ha generado el problema 10 del papiro Moscú, causadas por la difícil identificación de la figura central del problema y de uno de sus parámetros. En los Apéndices se ve con detalle dichos problemas y algunas de sus interpretaciones. Dejamos para la siguiente sección el valor indirecto de π que se puede obtener del análisis de los problemas sobre los que no hay duda en su interpretación.

π en el Egipto antiguo

La mayoría de los problemas que nos han llegado centrados en figuras circulares calculan el área de un círculo a partir del diámetro, bien como cálculo finalista bien como paso intermedio para el cálculo del volumen de un granero cilíndrico. Además, en la mayoría de los casos el diámetro mide 9 unidades, lo que facilita los cálculos como se verá continuación.

Se dispone de siete problemas relacionados con el círculo, de los cuales en dos se obtiene el área de un círculo a partir del diámetro; en otros dos, el volumen de un cilindro como área de la base por la altura, aplicando la misma regla para calcular el área de la base; en dos más, el volumen del cilindro se calcula aplicando una regla diferente, para obtener el volumen en otra unidad de capacidad, que no

[3] Algunos autores interpretan el problema 10 del papiro Moscú como el cálculo del área de un semi-cilindro que requiere como paso previo el cálculo de la semi-circunferencia. De ser cierto, estaríamos ante el único ejemplo de cálculo de la circunferencia a partir del diámetro.

pasa por el cálculo del área de la base; para un último problema no hay consenso sobre su interpretación (véase Cuadro 1).

Cuadro 1: Listado completo de problemas del Imperio Medio relacionados con figuras circulares y su interpretación.

Problema	**Interpretación**
Papiro Rhind, problema 50	Área de un círculo a partir del diámetro
Papiro Rhind, problema 48	
Papiro Rhind, problema 41	Volumen de un cilindro como área de la base por altura. El área se calcula aplicando la regla de los problemas 48 y 50
Papiro Rhind, problema 42	
Papiro Rhind, problema 43	Volumen de un cilindro sin calcularlo como área de la base por altura
Papiro Kahun, problema IV.3	
Papiro Moscú, problema 10	Interpretación dudosa. Área de una semi-esfera (dónde el área del círculo mayor se calcula aplicando la regla usual) o área de un semi-cilindro (como longitud de la semi-circunferencia por la altura).

En cuatro problemas del papiro Rhind se usa el mismo proceso para obtener el área de un círculo teniendo como parámetro el diámetro: se resta un noveno al diámetro y el resultado se eleva al cuadrado. En notación actual,

$$A = \left(d - \frac{1}{9}d\right)^2,$$

donde *A* es el área del círculo y *d* su diámetro. Es decir, $A = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \frac{256}{81}r^2$. A la vista de esta regla se entiende que muchos investigadores la interpreten como la primera evidencia de cuadratura del circulo. El área del círculo se obtiene elevando al cuadrado un término que podemos leer como el lado de un cuadrado equivalente. Sin embargo, no hay ninguna evidencia clara a favor de esta interpretación.

Lo que es seguro es que la constante π estaba completamente fuera del marco conceptual de los matemáticos egipcios, que no estaban familiarizados con la fórmula $A = \pi r^2$. Sin embargo, desde la perspectiva actual y si hay que asignar un valor implícito a π este sería de 256/81 ≈ 3,1605, una excelente aproximación para hace cuatro mil años.

Sin entrar en detalles, que dejamos en el Apéndice C, cualquiera de las interpretaciones del problema 10 del papiro Moscú (área de una semi-esfera o de un semi-cilindro) implica el mismo valor implícito de π.

¿Cómo llegaron los egipcios a su regla de cálculo para el área de un círculo?

Con sinceridad, en la actualidad no hay respuesta a esta pregunta y este hecho hay que dejarlo claro.

Pero como imaginar, o especular, es de humanos, a continuación se ofrecen dos explicaciones alternativas, una dada por Engels (Engels, 1977) y apoyada posteriormente por Robins y Shute (Robins y Shute, 1987), y la otra dada por Vogel (Vogel, 1958) y apoyada por Gillings (Gillings, 1981).

Engels sugiere que los egipcios aproximaron el área de un círculo a la de un cuadrado visualmente equivalente. Por construcción, el lado del cuadrado es aproximadamente ocho novenos del diámetro del círculo y de este hecho se deriva la regla para el cálculo del área del círculo.

Por otro lado, la ambigua interpretación del problema 48 del papiro Rhind, y la figura que lo acompaña, lleva a varios investigadores a ver en este problema una explicación, a través de un ejemplo, de cómo los egipcios derivaron la regla de cálculo del área del círculo aproximándola al área de un octógono irregular.

Veamos ambas explicaciones en detalle, insistiendo en que no hay ningún hecho objetivo que las apoye.

Primera cuadratura de círculo

Engels basa su explicación en la observación de que los egipcios se apoyaban del dibujo de una retícula cuadrada para realizar diseños más elaborados. Así, es razonable imaginar (siempre según Engels) que si deseamos dibujar un círculo de igual área que un cuadrado apoyándonos en una retícula obtengamos una solución muy parecida a la mostrada en la Figura 4a.

La clave para calcular el área del cuadrado (que se asume igual a la del círculo) a partir del diámetro del círculo radica en observar que los puntos de intersección entre el círculo y el cuadrado están a ¼ de las esquinas del cuadrado. Partiendo de esta observación tenemos dos formas diferentes de llegar a la regla de cálculo buscada, una meramente geométrica seguida por Engels (Engels, 1977) y otra seguida por Robins y Shute (Robins y Shute, 1987) que requiere del conocimiento del teorema de Pitágoras.

Engels asume que la retícula usada es más fina que la mostrada en la Figura 4a y que el lado del cuadrado base, que denominaremos *a*, está dividido en dieciséis partes (véase Figura 4b), es decir, que *a= 16*. La observación de la figura 4b nos lleva a pensar que el círculo dista del centro de un lado del cuadrado una unidad y que, por tanto, el diámetro es igual al lado del cuadrado más dos unidades, *d = 18.* Por tanto *a/d = 16/18* o equivalentemente *a = (8/9)d* y por consiguiente el área del círculo, que es el área del cuadrado de lado *a*, es $A = a^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$.

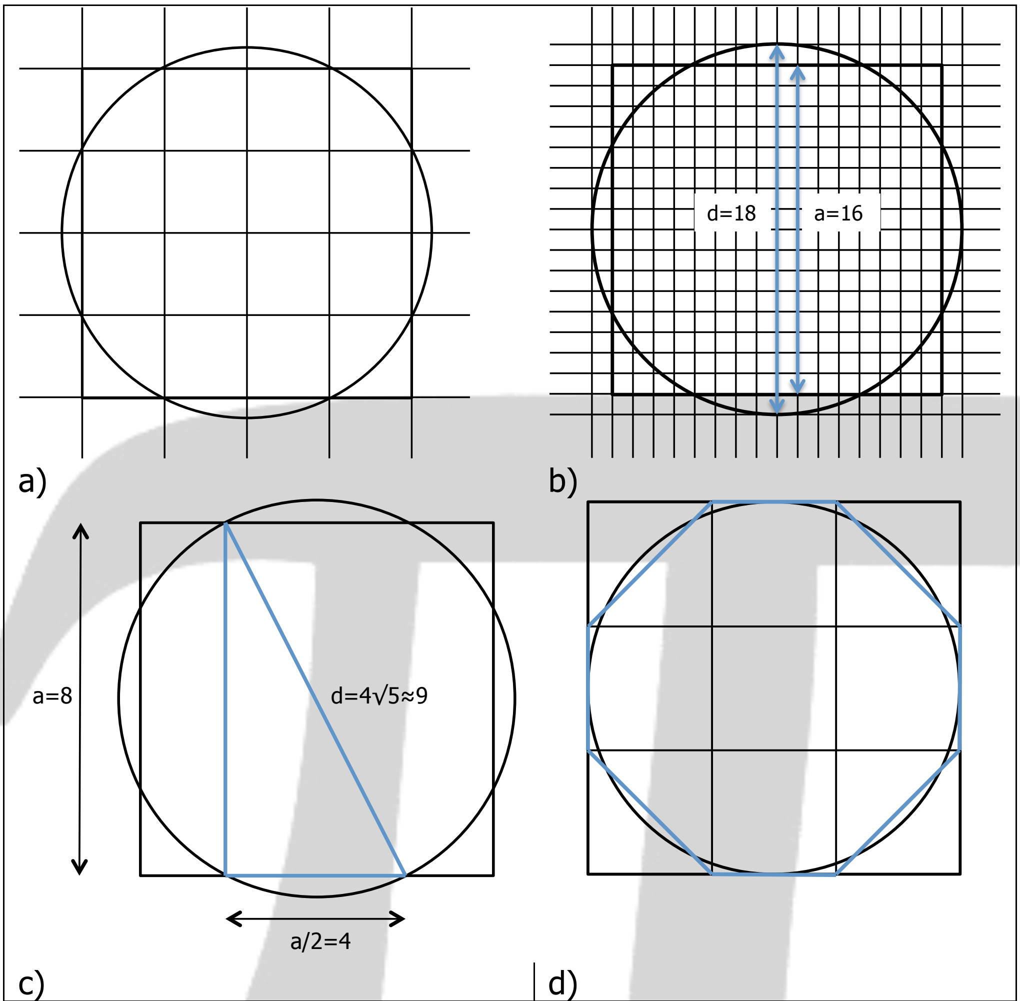

Figura 4: a) Cuadrado y círculo aparentemente de igual área dibujados con el apoyo de una cuadrícula; b) Cuadrado dividido en 256 subcuadrados para obtener la relación entre el lado del cuadrado *a* y el diámetro del círculo *d* según Engels; c) Teorema de Pitágoras para obtener la relación entre *a* y *d* según Robins y Shute; d) Cálculo del área del círculo basado en el problema 48 del papiro Rhind según Vogel y Gillings.

Robins y Shute aplican el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo formado por el lado del cuadrado, el diámetro del círculo y la mitad del lado del cuadrado (véase Figura 4c). Si el lado del cuadrado mide 8 unidades, se tiene que el diámetro mide aproximadamente 9 unidades. En concreto,

$$r^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 80;\ \ r = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \simeq 9.$$

El razonamiento seguido por Robins y Shute asume una familiaridad con el teorema de Pitágoras del cual no hay ninguna evidencia hasta el tercer siglo AEC, trece siglos después de que se escribiera el papiro Rhind.

Segunda cuadratura de círculo

Vogel y después Gillings toman el problema 48 del papiro Rhind para desarrollar su teoría. Este problema viene acompañado de un dibujo muy esquemático que estos investigadores asumen representa un cuadrado y el octógono irregular formado al cortar la cuatro esquinas del cuadrado a una distancia de un tercio del lado del cuadrado de cada esquina (véase Figura 4d).

La clave en la explicación reside en asumir que el octógono es una buena aproximación al círculo y que, por tanto, sus áreas son equivalente. Es decir, el área del circulo cuyo diámetro es el lado del cuadrado es igual al área del octógono definido según la figura del problema.

Así, si el lado del cuadrado, y por tanto el diámetro del círculo, es 9, se tiene que el área del octógono es igual al área de 7 cuadrados de lado 3, es decir 63. Ahora aproximamos este valor por 64 y tenemos que el área de un círculo de diámetro 9 es $64=8^2$.

Los cálculos mostrados en el problema 48 del papiro Rhind muestran la obtención de 9 al cuadrado (que sería el área del cuadrado) y de 8 al cuadrado (que sería el área del círculo).

Guillemot (Guillemot, 1992) rechaza el supuesto de simetría en el octógono hecho por Vogel y Gillings. Él propone que el octógono de la figura fue realizado cortando de un cuadrado de lado 9 dos esquinas diagonalmente opuestas de área 9/2 cada una (dos triángulos isósceles de lado 3) y otras dos esquinas, cada una de área 8/2 (dos triángulos de lados 2 y 4). Este octógono es más parecido al dibujado en el papiro y su área es directamente 64.

Realmente esta línea de razonamiento no tiene ninguna base. Es más fácil interpretar el dibujo que acompaña al problema como un cuadrado y un círculo inscrito en él; y los cálculo que los acompañan como el cálculo de las áreas de ambas figuras. Muchos problemas en el antiguo Egipto se acompañan de un dibujo siempre muy esquemático y poco riguroso. Así, es más verosímil entender que el escriba quiso dibujar de forma esquemática un circulo inscrito, que un octógono irregular. A parte de que nada del dibujo indica que las esquinas del cuadrado eliminadas para obtener el octógono miden un tercio del lado del cuadrado; y como principal crítica que estaríamos ante el único texto donde el escriba no busca un caso de aplicación práctica sino una fundamentación teórica.

Quiero terminar este apartado insistiendo que nada abala en absoluto ninguna de las teorías arriba expuestas para explicar la regla de cálculo del área de un círculo a partir del diámetro. Que duda cabe que es obligación de los investigadores ir más allá en el entendimiento de una cultura de lo que las evidencias permiten pero siempre manteniendo todas las cautelas necesarias y dejando claro cuando se traspasa la línea de lo objetivo para entrar en la especulación. Máxime cuando ésta se basa en una re-interpretación de las evidencias más compleja que otras alternativas igualmente válidas.

APÉNDICES

Apéndice A: Sistema de numeración Egipcio.

Los egipcios usaban un sistema de numeración en base 10 no posicional. En este sistema numérico cada potencia de 10 desde uno hasta un millón era representada con un signo diferente. La simple repetición de signos, de forma yuxtapuesta, permitía representar cualquier número

Para las fracciones los matemáticos egipcios usaban fracciones de la unidad (i.e., ½, 1/3, ¼, etc.) con la excepción de la fracción 2/3. En escritura hierática la fracciones se representaban escribiendo un punto encima del número que representaba el denominador; en jeroglífico el punto se reemplazaba por un símbolo en forma de lenteja (⬭). Las fracciones más usadas tenían símbolo propio como 2/3, ½, 1/3 y ¼.

Las fracciones no unitarias se expresaban por medio de la suma de fracciones de la unidad. Por ejemplo, $\frac{3}{5}$ se podía representar como $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ (como era usual en el Imperio Antiguo) o como $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$ (Imperio Medio). En muchos casos existe más de una representación de una fracción a partir de la suma de fracciones de la unidad, en cuyo caso no está clara la regla de decisión seguida por los egipcios. Aunque usaban diferentes representaciones, parece que preferían combinaciones cortas de fracciones con denominadores pequeños y pares. (La presencia de denominadores pares simplificaba el proceso de multiplicar por dos, operación clave en sus reglas de multiplicación y división).

A lo largo del artículo representaremos las fracciones de la unidad mediante el denominador seguido de una comilla simple, i.e., ½ = 2′, 1/3 = 3′, ¼ = 4′, etc. El cociente 2/3 lo representaremos por 3″.

En los textos conservados sólo aparecen las reglas de cálculo para la multiplicación y la división y ambas eran llevadas a cabo usando diversas técnicas según la magnitud de los números involucrados. Para el resto de operaciones aritméticas (suma, resta, cálculo de la mitad, elevar al cuadrado y raíz cuadrada) se da el resultado directamente. Veamos tres ejemplos de operaciones con números enteros, dos de multiplicación y uno de división, tomados del papiro Rhind.

Papiro Rhind, Problema 52: Proceso de multiplicación de 2000 y 5.

\.	2.000
2	4.000
\4	8.000
Total	10.000

El texto tiene dos columnas. Empieza por un punto en la primera columna y el valor que debe ser multiplicado en la segunda. Las dos siguientes líneas duplican los valores numéricos de la anterior (el punto equivale al número 1). Así, en la segunda línea se lee 2 en la primera columna y 4.000 en la segunda, y en la tercera línea se lee 4 en la primera columna y 8.000 en la segunda.

Ahora, se busca en la primera columna los números cuya suma den el segundo multiplicando, 5. En el ejemplo el escriba identifica la primera y tercera filas, que son marcadas con un marca de verificación (\). El resultado de la multiplicación es obtenido sumando para la filas marcadas los valores numéricos de la segunda columna, 2.000 + 8.000 = 10.000, que se escribe en la última línea.

Papiro Rhind, Problema 69: Proceso de multiplicación de 80 y 14.

.	80
\10	800
2	160
\4	320
Total	1.120

En este caso el multiplicando de 14 excede de 10 así que el procedimiento de cálculo varía ligeramente. Primero se obtiene el resultado de multiplicar 80 por 10, que se muestra en la segunda línea. Las dos siguientes líneas se obtienen por el procedimiento usual de duplicación, empezando por la primera línea. En este caso 14 se obtiene como la suma de 10 y 4 (líneas marcadas), así que el resultado de la multiplicación es 800 + 320 = 1.120, que aparece escrito en la última línea.

La división se realiza de la misma forma con los papeles de la primera y segunda columnas intercambiados.

Papiro Rhind, Problema 76: Proceso de división de 30 entre 2 2'.

.	2 2'
\10	25
\2	5
Total	12

De nuevo observamos dos columnas, En este caso el divisor es sucesivamente duplicado o multiplicado por 10. Entonces, se localizan en la segunda columna los valores que sumados den el dividendo 30. Estas líneas son marcadas y su suma para los valores de la primera columna nos lleva al resultado de la división 12.

De los ejemplos previos queda claro que el proceso de duplicar era clave en la aritmética egipcia. Cuando se trabajaba con fracciones, si es una única fracción de la unidad y el denominador es par, el proceso de duplicado es sencillo. Por ejemplo, la duplicación de 34′ nos lleva a 17′. Ahora bien, si el denominador es impar o hay que duplicar una serie de fracciones de la unidad, el cálculo deja de ser inmediato. Por esta razón los egipcios crearon las tablas denominadas 2÷N, una lista de dobles de fracciones impares de la unidad.

El proceso de multiplicación y división con fracciones es el mismo que el visto para números enteros. Veamos un ejemplo para cada operación.

Papiro Rhind, Problema 6: Proceso de multiplicación de 3″ 5′ 30′ por 10.

.	3″ 5′ 30′
\2	1 3″ 10′ 30′
4	3 2′ 10′
\8	7 5′
Total 9	

En este caso la multiplicación por 10 no se puede realizar de forma directa y se opta por el proceso de duplicación y suma.

Si el divisor es mayor que el dividendo el proceso se inicia por sucesivas divisiones por 2:

Papiro Rhind, Problema 58: Proceso de división de 70 entre 93 3′.

.	93 3′
\2′	46 3″
\4′	23 3′
[Total	2′ 4′]

Apéndice B: Problemas del papiro Rhind.

El papiro Rhind (PR) es el mejor ejemplo de la matemática egipcia. Debe su nombre a Alexander H. Rhind, el anticuario escocés que compró el papiro en 1858 en Luxor. No se sabe con exactitud su procedencia ni fechado, pero hay cierto consenso en que procede de cerca de Ramesseum y es una copia escrita hacia el 1650 AEC de un original doscientos años más antiguo.

El PR contiene dos tablas de fracciones y 84 problemas divididos en tres libros. A nosotros nos interesan cinco de los problemas contenidos en el libro II, los problemas 48 y 50 sobre el cálculo de área de un círculo, y los problemas 41 a 43 sobre el cálculo del volúmen de un granero cilíndrico. En los problemas 41 y 42 el método para calcular el área de un cilindro es el actual, se calcula el área de la base y se multiplica por la altura; en el problema 43 se usa un método diferente para obtener el resultado en una medida de capacidad alternativa.

El PR es también relevante porque contiene un problema que han generado mucha literatura, el problema 48, sobre el que ya se ha ofrecido un extenso análisis previamente.

PR 50: el escriba muestra como encontrar el área de un círculo a partir de su diámetro. Para los cálculos asume un valor del diámetro de 9 khet por conveniencia, no porque sea un caso practico. Un khet equivale aproximadamente a 52 metros por lo que el círculo al que se refiere el problema tendría casi 1.500 metros de circunferencia.

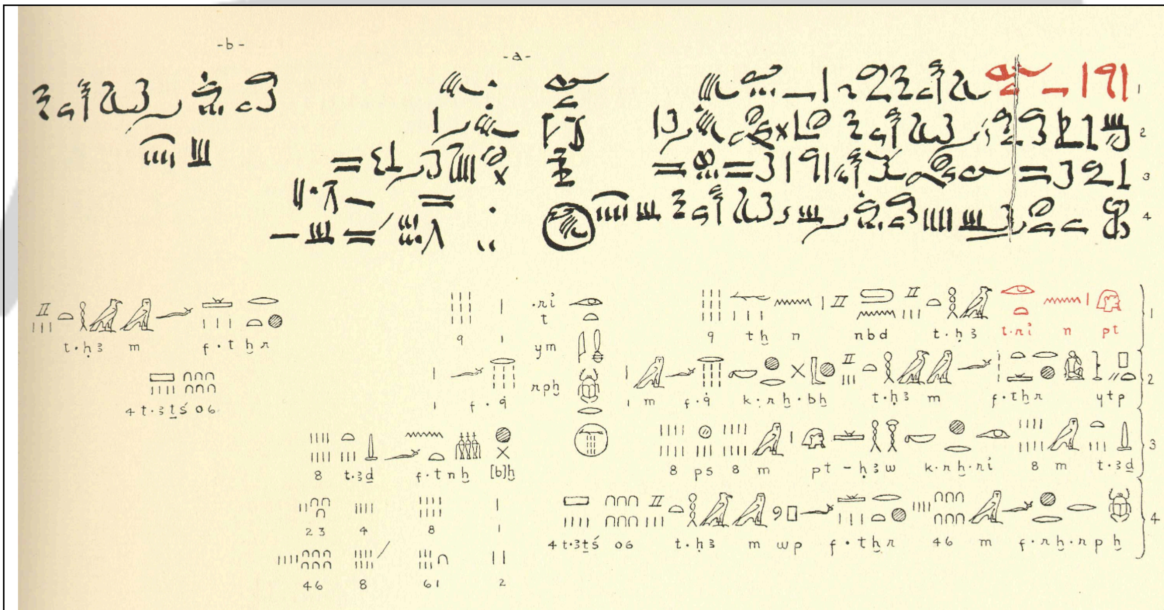

Figura 5: Problema 50 del papiro Rhind.

El problema describe el proceso de cálculo en cuatro líneas (numeradas 1 a 4 en la Figura 5):

L1	Método de calcular un círculo de diámetro 9 khet. ¿Cuál es el área?
L2	Quita 9′ del diámetro, es decir, 1
L3	El resto es 8. Multiplica 8 por 8
L4	Ello hace 64. Por tanto, contiene 64 setat de tierra.

Además, en la parte central, donde aparece una representación de un círculo con el número 9 en su interior, se pueden leer las siguientes operaciones:

L1	Haz esto	.	9		
L2		9′	1		
L3	Es resto es 8				
L4		.	8	4	32
L4′		2	16	\8	64

Finalmente, en la parte de la izquierda (columna –b- en la Figura 5) se lee ‘El área es 64 setat’.

PR 48: el escriba representa un cuadrado y un octógono inscrito. Dentro de la figura se lee el número 9 que se debe interpretar como el lado del cuadrado. La interpretación de este problema no está clara y aquí nos limitamos a mostrar una transcripción del texto hierático.[4] En el papiro no se indica cuál es el problema a resolver y se limita a obtener el cuadrado de 9 y de 8, pudiéndose interpretar el primer cálculo como el área del cuadrado y el segundo como el área de un círculo de diámetro 9.

La transcripción de las 5 líneas sería (véase Figura 6):

L1			\.	9
L2	.	8	2	18
L3	2	16	4	36
L4	4	32	\8	72
L5	\8	64	Total	81

Figura 6: Problema 48 del papiro Rhind.

[4] Una discusión más detallada del problema puede leerse en este artículo en la sección *Segunda cuadratura del círculo*.

PR 41: Se pide calcular el volumen de un granero cilíndrico de diámetro 9 cubos y altura 10 cubos. El escriba obtiene primero el área del círculo igual a 64 y la multiplica por 10 obteniendo 640 cubos al cubo. Luego multiplica este valor por 1 2’ para pasarlo a una unidad de medida de grano, el khar. Como 1 2’ khar es un cubo al cubo, el volumen final es 960 khar. Finalmente expresa esta cantidad en cientos de cuádruples hekat dividiendo por 20, dando el valor final de 48 (cientos de) cuádruples hekat.

La transcripción de las 9 líneas sería (véase Figura 7):

L1	Método de calcular un granero circular de 9, 10. Debes restar 9’ de 9 como 1, el resto 8					
L2	Multiplica 8 por 8, 64 resultará. Debes multiplica 64					
L3	por 10. Ello resultará como 640. Súmale su mitad a ello. Resultará como 960. Esta es la cantidad en khar.					
L4	Debes calcular 20’ de 960 que da 48. Este es el contenido en cuádruple hekat de grano, 48 hekat					
L5	El método de trabajo					
L6	1	8	\8	64	Total 960	
L7	2	16	.	64	10’	96
L8	4	32	\10	640	\20’	48
L9			\2’	320		

Figura 7: Problema 41 del papiro Rhind.

PR 42: Es idéntico al problema 41 pero ahora el diámetro de la base es 10 lo que implica tener que trabajar con fracciones. Además, aunque los cálculos se han realizado con total precisión, los valores mostrados omiten en ocasiones la última fracción. Al quitar un noveno de 10 queda 8 3″ 6′ 18′. Se multiplica esta cantidad por ella misma y da 79 108′ 324′, que multiplicada por la altura de 10 y da un volumen de 790 18′ 27′ 54′ [81′] cubos al cubo. Se le suma la mitad para obtener el volumen en khar de 1185 [6′ 54′]; finalmente se divide por 20 y se obtiene el volumen de 59 4′ [108′] cientos de cuádruples hekat de grano.

La transcripción de las 9 líneas sería (véase Figura 8):

L1 Método de calcular un granero circular de 10, 10. Debes restar 9′ de 10 como 1 9′, el resto 8 3″ 6′ 18′

L2 Multiplica 8 3″ 6′ 18′ por 8 3″ 6′ 18′, 79 108′ 324′ resultará.

L3 Multiplica 79 108′ 324′ por 10. Ello resultará como 790 18′ 27′ 54′ [81′]

L4 Súmale su mitad a ello. Resultará como 1185 [6′ 54′]. Multiplica 1185 [6′ 54′] por 20′ que da 59 4′ [108′]. Este es el contenido en cuádruple hekat de grano, 59 4′ [108′] hekat

L5	.	8 3″ 6′ 18′	3′	2 3″ 6′ 12′ 36′ 54′	.	79 108′ 324′	\20′ 59 4′ [108′]
L6	2	17 3″ 9′	\6′	1 3′ 12′ 24′ 72′ 108′	10	790 18′ 27′ 54′ [81′]	
L7	4	35 2′ 18′	\18′	3′ 9′ 27′ 108′ 324′	2′	395 36′ 54′ 108′ [162′]	
L8	\8	71 9′			Total 1185 [6′ 54′]		
L9	\3″	5 3″ 6′ 18′ 27′	Total 79 108′ 324′		10′	118 2′ [54′]	

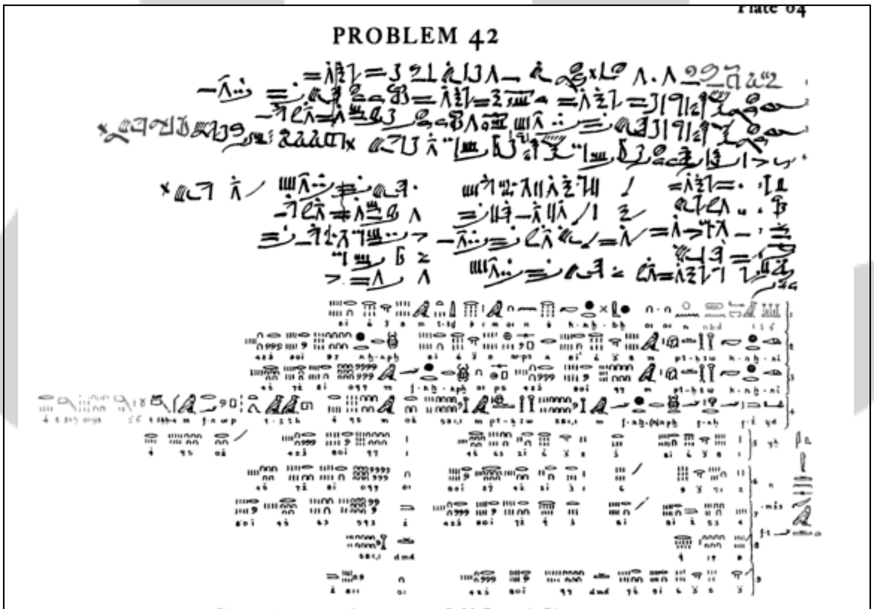

Figura 8: Problema 42 del papiro Rhind.

PR 43: De nuevo se pide el cálculo del volumen de un granero circular, pero en este problema concurren una serie de factores que dificultaron su interpretación. El escriba calcula directamente el volumen en khar, sin necesidad de obtener primero el valor en cubos al cubo y sin calcular el área de la base. Además, el escriba cometió dos errores de transcripción, posiblemente desde el papiro original (circa 1800 AEC). Por un lado, intercambia las dos dimensiones del granero (diámetro y altura) y, por otro, añade una línea extra 'resta un noveno del diámetro' que debería ser reemplazada por 'suma al diámetro un tercio de él', tal y como aparece en las operaciones indicadas. No fue hasta que Schack-Schakenburg interpretó correctamente el problema del papiro Kahun IV.3, que es muy similar, que se dio con la lectura correcta del problema 43.

En los problemas 41 y 42 la fórmula que describe el proceso de cálculo del volumen sería $V=\left[\left(d-\frac{1}{9}d\right)^2 h\right]\frac{3}{2}$. La expresión entre paréntesis permite obtener el área de la base, que se multiplica por la altura para obtener el volumen en cubos al cubo. Esta magnitud multiplicada por 1.5 da el volumen de grano en khar. El proceso de cálculo descrito en el problema 43 queda descrito a través de la siguiente fórmula, $V=\left(d+\frac{1}{3}d\right)^2\left(\frac{2}{3}h\right)$. Puede comprobarse fácilmente que ambas expresiones son equivalentes, y que la segunda no se justa al proceso usual de cálculo de volúmenes a partir del área de la base y la altura. La primera alternativa tiene la ventaja de calcular el volumen en cubos al cubo como paso intermedio, mientras que la segunda alternativa conlleva unos cálculos ligeramente menos laboriosos.

La transcripción de las ocho líneas sería (véase Figura 9):

L1 Método de calcular un granero circular de 9, 6. Debes restar 9′ de 9 como 1, el resto 8

L2 Suma a 8 3′ de él. Ello resultará como 10 3″. Multiplica 10 3″ por 10 3″. Ello resultará como 113 3″ 9′.

L3 Multiplica 113 3″ 9′ por 4, siendo 4 cubos 3″ de la altura. Ello resultará como 455 9′, su contenido en khar.

L4 Encuentra 20′ de esto, es decir 22 2′ 4′ 45′.[5] La cantidad de grano que cabe es 22 2′ 4′ cientos de hekat, 2′ 32′ 64′ hekat y 2 2′ 4′ 36′ ro.

L5	\.	8	.	10 3″	.	113 3″ 9′	.	455 9′
L6	3″	5 3′	\10	106 3″	2	227 2′ 18′	10′	45 2′ 90′
L7	\3′	2 3″	\3″	7 9′	\4	455 9′	\20′	22 2′ 4′ 45′
L8	Total 10 3″		Total 113 3″ 9′					

[5] El resultado de dividir 455 9′ entre 20 es 22 2′ 4′ 180′ pero el escriba escribe incorrectamente 22 2′ 4′ 45′. En la última parte de la resolución el escriba expresa 180′ cientos de cuádruples hekat en fracciones de cuádruples hekat y fracciones de cuádruples ro. En concreto, 100 por 180′ le da 2′ 32′ 64′, y el resto (5/576) lo multiplica por 320 para reducirlo a cuádruples ro, obteniendo 2 2′ 4′ 36′.

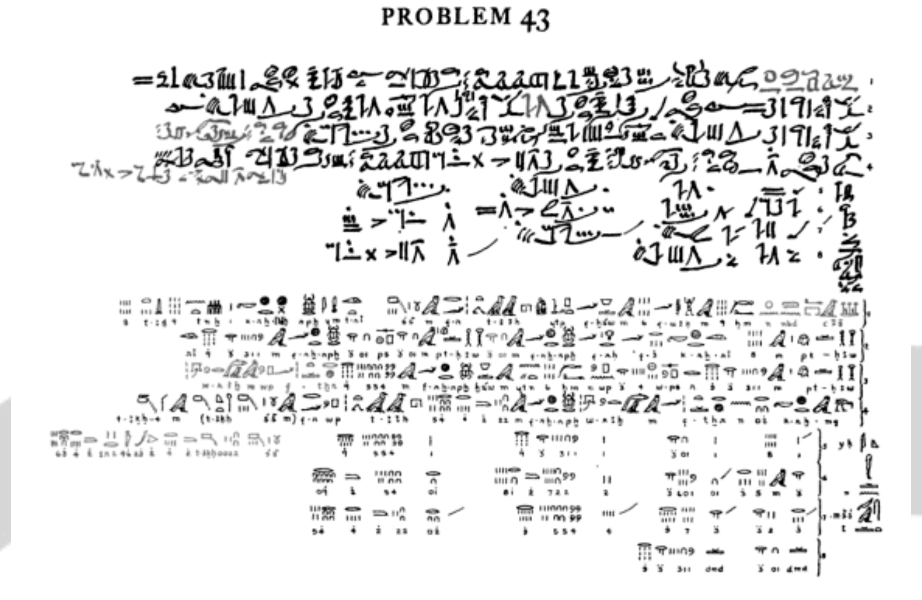

Figura 9: Problema 43 del papiro Rhind.

Apéndice C: Problemas del papiro Moscú.

El papiro Moscú (PM) data aproximadamente del 1850 AEC (entre la dinastía 12ª y 13ª) y contiene 25 problemas junto con sus soluciones. Fue comprado por el egiptólogo ruso Vladimir Golenishchev a finales del siglo XIX en Tebas y actualmente se encuentra en el Museo Estatal Pushkin de Bellas Artes.

El único problema relacionado con formas circulares es el problema 10 que, por diversas circunstancias, no deja claro su significado exacto lo cual ha provocado diferentes interpretaciones. Las dudas en la interpretación surgen porque: a) no está clara la forma del objeto sobre el que se hacen los cálculos; b) no queda claro si se da una única dimensión del objeto o dos; c) tampoco está claro a que dimensión se refiere; y d) en el texto se describe la forma del objeto como 'medio huevo' pero los autores discrepan sobre la traducción correcta. Respecto de las interpretaciones, hay tres diferentes: una, la menos aceptada, sería que el problema trata del cálculo del área de un semi-círculo; las otra dos, que centran la controversia, que se pide el cálculo del área de una semi-esfera o de un semi-cilindro.

Struve fue el primer traductor del problema y lo interpretó como el cálculo del área de una semi-esfera (Struve, 1930). Posteriormente Peet consideró las otras dos opciones aunque dio más credibilidad al supuesto de que el problema 10 pide el área de un semi-cilindro (Peet, 1931). Otros autores, como Neugebauer, Van der Waerden, Clagget o Gillings (Neugebauer, 1934; Van der Waerden, 1954; Clagget, 1989; Gillings, 1981), han entrado en la polémica sobre la interpretación del problema, del que lo único que se puede decir con certeza es que actualmente no queda clara su interpretación.

Veamos primero la traducción, para a continuación realizar una interpretación matemática del problema y resumir las opiniones de algunos de los autores citados. El lector puede encontrar más detalles en Clagett (Clagett, 1989) y Gillings (Gillings, 1967).

Columna derecha (véase Figura 10):

L1	Método de calcular una cesta
L2	Si alguien te dice 'Una cesta con una boca abierta
L3	de 4 2' en buena condición
L4	Dime su área
L5	Calcula 9' de 9, porque la cesta es
L6	la mitad de un huevo. El resultado es 1

Columna central:

L1	Ello resultará como 8
L2	Calcula 9' de 8
L3	Ello resultará 3'' 6' 18'. Cal-
L4	cula el resto de 8 después
L5	de quitar 3'' 6' 18'. El resultado es 7 9'.

Columna izquierda:

L1	Multiplica 7 9' por 4 2'
L2	El resultado es 32. Observa, este es el área
L3	Verás que es correcto.

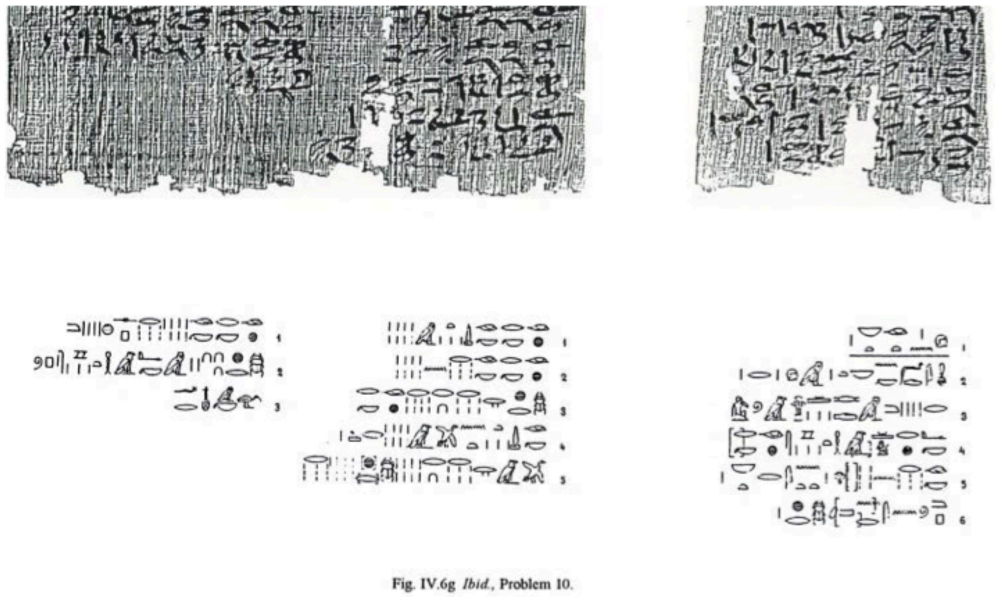

Figura 10: Problema 10 del papiro Moscú.

Las dudas en la interpretación vienen de los siguientes hechos. No está clara la figura analizada porque la forma de *cesta* (Col.der.-L1 y L2) es muy imprecisa y en grabados egipcios aparecen cestas tanto de forma semi-esférica como semi-cilíndrica, entre otras. En Col.der.-L6 se describe como 'la mitad de un huevo' pero la palabra usada para *huevo* admite cierta ambigüedad. El problema, aparentemente, sólo da un parámetro que vale 4 2′ (Col.der.-L3) pero en la frase aparece una partícula que solo se usa cuando la figura viene definida por dos parámetros. ¿Falta por tanto un dato? Si hay un segundo parámetro debe ser el 9 que aparece en Col.der.-L5, en otro caso el 9 debe entenderse como el doble de 4 2′ (aunque su cálculo no se indique). Finalmente, el resultado del problema es 32 unidades.

Punto de vista matemático

Con esta información en la cabeza, veamos la coherencia matemática de las tres interpretaciones descritas por Struve y Peet. Con independencia de su interpretación exacta, los cálculos mostrados podemos escribirlos en notación actual como,

$$A = \left(\frac{8}{9}\cdot\frac{8}{9}9\right)4{,}5 = 32$$

Las dudas surgen de si debemos interpreta el valor de 9 y 4,5 como uno o dos parámetros diferentes y a que corresponden respecto de la figura analiza. Si miramos las formulas matemáticas para el calculo del área de las tres figuras consideradas tenemos:

Área de una semi-esfera, $A_{esf} = 2\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi d^2$

Área de un semi-cilindro, $A_{cil} = \frac{1}{2}\pi d h$

Área de un semi-círculo, $A_{cir} = \frac{1}{2}\pi r^2$

Las tres expresiones son muy similares y pueden dar el mismo área según sean los valores de *d*, *r* y *h.* El área que se obtiene si asumimos que el problema da como único parámetro el diámetro de una esfera es la misma que si asumimos que el único parámetro es el radio de un círculo, e igual a 32 unidades para un valor del parámetro de 4,5. Además, si se asume que se dan dos parámetros, diámetro del cilindro y su altura, ambos iguales a 4.5, de nuevo obtenemos el mismo área.

Cualquiera de las tres interpretaciones es coherente con los cálculos realizados. Además, todas ellas asumen un valor implícito para π de 256/81.

La interpretación del problema como el calculo del área de un semi-círculo parece claramente incorrecta. La descripción de la figura del problema como un *cesto* indica que es tridimensional y el cálculo del área parece un poco rebuscada, cuando sería más directo calcular el área del círculo completo y dividirla entre dos.

Si se trata de una semi-esfera, como afirma Struve, debemos entender que hay un solo parámetro, el diámetro, igual a 4 2′ y que el valor de 9 que aparece más adelante es su doble. Al margen de las dudas suscitadas por cuestiones lingüísticas, esta interpretación nos lleva al sorprendente hecho de que en el siglo XIX AEC ya se disponía de una fórmula para el cálculo de la superficie de una figura tan compleja como la esfera, 1500 años antes que los resultados de Arquímedes.

De acuerdo con Peet, el problema tiene dos parámetros que son el diámetro y la altura de un semi-cilindro, y ambos valen 4 2′. Así, el problema primero calcula la longitud del semi-círculo base, igual a 7 9′, que multiplica por la altura 4 2′. Esto implica que los egipcios sabían calcular con gran precisión para la época la longitud de una circunferencia (con un valor implícito de π idéntico al usado para el cálculo del área) y que el problema 10 del papiro Moscú es el único ejemplo conocido de cálculo de una longitud de circunferencia.

En definitiva, cualquiera de las interpretaciones tiene sus puntos fuertes y débiles y nos llevan a asumir por parte de los matemáticos egipcios unos conocimientos de los que no disponemos de evidencia adicional.

Apéndice D: Problemas del papiro Kahun.

El papiro Kahun (PK) data del final de la dinastía 12ª y principios del 13ª. Fue localizado por Flinder Petrie durante las excavaciones de una ciudad de obreros cerca de la pirámide de Sesotris II. El PK es una colección de textos administrativos, médicos, veterinarios y matemáticos. Entre estos últimos nos interesa el fragmento denominado Kahun IV.3 por tratarse del cálculo del volumen de un granero cilíndrico. En este problema el escriba usa un procedimiento que obtiene directamente el volumen en khar, y que es idéntico al usado con el mismo propósito en el problema 43 de PR.

PK IV.3: El problema muestra un círculo con los números 12 y 8 inscritos arriba y al lado, y el valor 1365 3′ dentro. Bajo el dibujo hay una columna de cálculos así como a su izquierda. No aparece ningún enunciado del problema cuyos cálculos se muestran (véase Figura 11). Sin embargo no cuesta seguir los cálculos y entender el propósito: calcular el volumen de un granero cilíndrico de diámetro 12 y altura 8. La columna bajo el dibujo del círculo muestra los cálculos necesarios para sumar un tercio del diámetro a éste, obteniendo 16, y elevarlo al cuadrado, lo que da 256. La columna 2 muestra los pasos necesarios para multiplicar este valor por 5 3′ y obtener el resultado final de 1365 3′, mostrado en el interior del círculo. Aunque no se indica, no es venturado presuponer que el valor de 5 3′ viene de multiplicar la altura 8 por 3″. Así, el escriba obtiene el volumen del granero en khar directamente, al igual que en problema 43 de PR.

La transcripción de las líneas sería (véase Figura 11):

Columna 1:

L1	3″	8
L2	3′	4
L3	Total	16
L4	\.	16
L5	\10	160
L6	\5	80
L7	Total	256

Columna 2:

L1	\.	256
L2	2	512
L3	\4	1024
L4	3″	85 3′
L5	Total	1365 3′

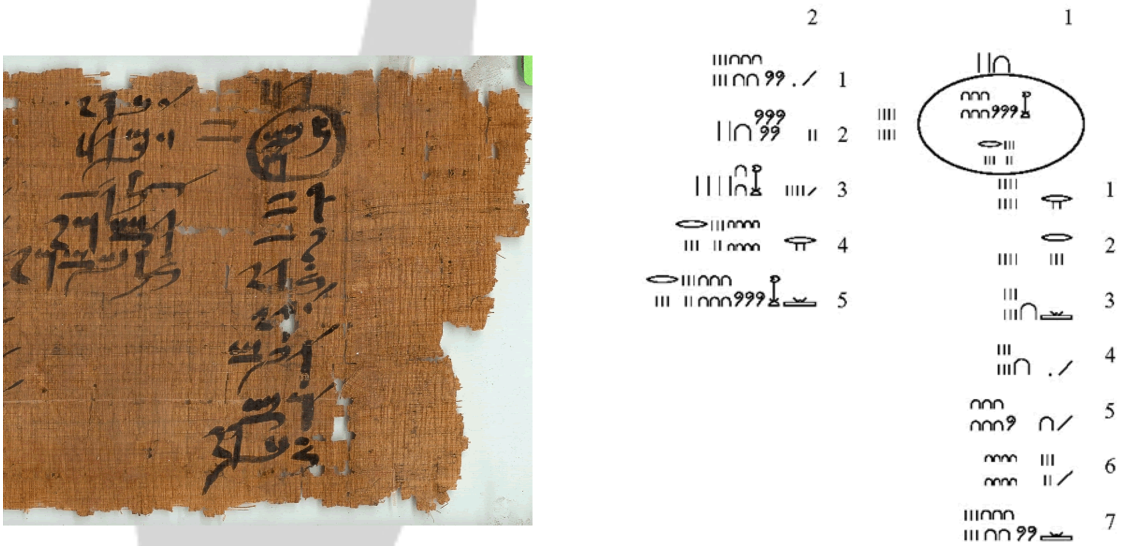

Figura 11: Problema IV.3 del papiro Kahun.

Bibliografía

Buffum, A. (1927), *The Rhind Mathematical Papyrus*, Mathematical Association of America, Oberlin, Ohio, EE.UU.

Clagett, M. (1989), *Ancient Egyptian Science: A Source Book. Ancient egyptian mathematics. Volume three*, American Philosophical Society, Filadelfia, EE.UU.

Corinna, R. (2007), *Architecture and Mathematics in Ancient Egypt*, Cambridge University Press, Reino Unido.

Engels, H. (1977), *Quadrature of the circle in ancient Egypt*, Historia Mathematica, vol 4(2), 137–140.

Friberg, J. (2005), *Unexpected links between Egyptian and Babylonian mathematics*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapur.

Gillings, R. J. (1967), *The area of the curved surface of hemisphere in Ancient Egypt*, The Australian Journal of Science, vol 30(4), 113-116

Gillings, R. J. (1981), *Mathematical in the Time of the Pharaohs*, General Publishing Company, Ltd., Toronto, Canada.

Guillemot, M. (1992), *Les notations et les pratiques opératoires permettent-elles de parler de 'fractions égyptiennes'?,* Histoire de fractions, fractions d'histoire, Editores Paul Benoit, Karine Chemla, Jim Ritter, Basel/Boston/Berlin.

Imhausen, A. y Rowe, D. E. (2006), *Ancient Egyptian mathematics: New perspectives on old sources*, The Mathematical Intelligencer, vol 28(1), 19-27.

Katz, V.J., Imhausen, A., Robson, E., Dauben, J. W., Plofker, K. y Berggren, J. L. (2007) *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, and Islam. A Sourcebook*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, EE.UU.

Neugebauer, O. (1934), *Ägyptische Geometrie*, Vorlesungen über Geschichte der Antiken Mathematischen Wissenschafen, vol 1, 122-137, Springer, Berlín, Alemania

Peet, T. E. (1931), *Review of Struve's Translation of the Moscow Mathematical Papyrus*, Journal of Egyptian Archaeology, vol 17.

Robins, G. y Shute, C. (1987), *The Rhind Mathematical Papyrus: An Ancient Egyptian Text*, British Museum Publications, London, Reino Unido.

Struve, W. W. (1930), *Mathematischer Papyrus des Staatlichen Muséums der Schönen Künste in Moskau*, Quellen and Studien zur Geschichte der Mathematik, Part A, vol 1, Berlin, Alemania

Van der Waerden, B. L. (1954,) *Science A wakening*, translated by Arnold Dresden (Groningen, 1954), 15–36.

Vogel, K. (1958*), Vorgriechische Mathematik I*, Vorgeschichte and Agypten, Schroedel, Hannover, Alemania