π en la Antigua India (Shulba-sutras)

Iván Arribas (ivan.arribas@uv.es)

INTRODUCCIÓN

Quería hacerlo bien. Era su primer cometido de responsabilidad, su sacerdote-tutor lo estaba observando y no quería equivocarse. Habían terminado ya los ritos y sacrificios del cambio de luna y el altar en forma cuadrada debía ser transformado en otro de forma circular usando los mismos ladrillos. Observaba el altar, una tarima cuadrada hecha con ladrillos de diversas formas que cubría la zona central del recinto sagrado. Debía de cambiar los ladrillos necesarios para obtener un altar circular semejante, sin dejar de usar ningún ladrillo ni necesitar otros nuevos. Recordó las enseñanzas recibidas por el sacerdote-tutor y empezó.

Tomó un trozo de cuerda, ató con una pequeña estaca de madera un extremo en el centro del altar y caminó hacía una de las esquinas manteniendo la cuerda tensa. Ya tenía la primera medida que necesitaba así que enrollo el resto de cuerda. Procuró seguir con la cuerda tensa y se bajó del altar para caminar hasta hacer que la cuerda pasara por el centro de un lateral. Bajó la cuerda hasta el suelo, la sujetó con una piedra, y después fijó con otra piedra la cuerda en el borde del altar, en la mitad del lateral. Ahora venía la parte más delicada. Volvió al extremo que había sujetado con una piedra, lo tomó y dobló la parte de la cuerda que sobresalía del altar en tres partes iguales. Hizo esta maniobra sin que se cayera la piedra que sujetaba la cuerda en el lateral del altar. Ya estaba, ahora libero la cuerda del lateral con una pequeña sacudida y caminó alrededor del centro del altar dejando en el suelo pequeñas marcas para trazar la silueta circular. Se alejo un poco y vio que su sacerdote-tutor lo miraba con aprobación.

El trabajo que le quedaba por hacer era pesado pero sencillo: debía quitar las piedras de las esquinas del altar cuadrado que sobresalían del círculo trazado y colocarlas para rellenar el suelo que había entre los lados del altar y el trazado circular. Si lo hacía con cuidado ni la faltaría ni le sobraría ninguna piedra.

Cuando finalizó el trabajo su sacerdote-tutor se acerco al altar, lo contempló un largo rato y se fue sin decirle nada. Por fin se relajó, lo había hecho bien.

Los textos más antiguos que se conservan sobre matemática en la Antigua India (que comprendería la actual India así como Pakistán, Nepal, Bangladesh y Sri Lanka) están escritos en sánscrito, una lengua ya hablada por los habitantes del área de Punjab hacia la mitad del segundo milenio a.e.c.

De este periodo se preserva muy poco texto escrito, en su mayoría inscripciones grabadas en piedra, dado que el clima subtropical indio es poco adecuado para conservar otro tipo de soportes. El sánscrito fue inicialmente un lenguaje oral y no es hasta mediados del primer mileno que aparece evidencia definitiva de sánscrito escrito. Aunque se conservan textos más antiguos, muchos están escritos en lenguas que actualmente no han sido descifradas. Además, la falta de marcadores cronológicos absolutos en los textos y de otra evidencia arqueológica imposibilita su datación exacta y una reconstrucción del legado cultural dejado.

La escritura estaba inicialmente restringida a las lenguas vernáculas por entenderse el sánscrito como una lenguaje para la transmisión oral. Los primeros textos conocidos escritos en sánscrito son los *Vedas* (que podemos traducir como *Conocimiento*), un canon de himnos, invocaciones y procedimientos para los ritos religiosos. Los textos védicos estaban escritos en verso o en prosa con frases breves, denominadas *sutras*, lo que facilitaba su memorización para ser recitados, y su transmisión oral. Con el tiempo, estos textos védicos se acompañaron de otros textos complementarios para su interpretación y entendimiento, denominados *disciplinas de los Vedas*, que se agrupan en seis materias.

Es en estos antiguos *Vedas* y en las *disciplinas de los Vedas* donde aparecen los primeros indicios de la matemática india. Dado que estos textos no son propiamente tratados matemáticos ni tenían como finalidad enseñar matemáticas, lo que nos encontramos en ellos son fragmentos dispersos los intereses matemáticos de la época.

TEXTOS MATEMÁTICOS EN LA ANTIGUA INDIA

Los *Vedas*

El análisis del contenido y estilo lingüístico de los *Vedas* ha permitido concluir que los himnos contenidos en *Rig-veda* (alabanza-conocimiento) son las composiciones védicas más antiguas. Después vendrían los procedimientos de los ritos contenidos en *Iagur-veda* (rito sacrificial-conocimiento), el *Sama-veda* (melodía-conocimiento) que describe las melodías usadas en los rituales, y el *Átharva-veda* (conocimiento de Átharva, una forma alternativa de denominar al dios Shiva) que está formado por una colección de himnos, encantamientos, maldiciones… En algunos *sutras* se citan cantidades y otros se centran en los números y su significado cósmico, posiblemente influidos por la cultura mesopotámica, aunque no hay evidencia definitiva de esta transmisión.

Junto con los *Vedas* aparecen otros textos de apoyo agrupados en seis materias, denominados *Disciplinas de los Vedas*. Las materias son *Siksa*, fonética, para pronunciar correctamente los himnos e invocaciones en sánscrito; *Vyakarana*, gramática, para el entendimiento de las frases; *Chandas*, métrica, para preservar la estructura de los versos; *Nirukta*, etimología, que explica parte del vocabulario; *Jyotisa*, astronomía y calendarios, que regulaba el día, mes y estación de los sacrificios; y *Kalpa*, práctica ritual, que garantizaba la continuidad en la tradición de los sacrificios y su correcta realización.

Los *Shulba-sutras*

Las primeras evidencias de textos matemáticos indios datan de la mitad del primer milenio a.e.c., y corresponden a las composiciones conocidas como *Shulba-sutras*, que forman parte de *Kalpa,* la disciplina de los vedas relacionada con la práctica ritual. Entre otros contenidos, la *Kalpa* contiene reglas para el trazado y construcción de altares y hogares de sacrificio. Ciertas formas y tamaños de los altares estaban asociados a la dádiva que el orador deseaba de los dioses.

Se conocen nueve *Shulba-sutras* diferentes, de los que cuatro tienen relevancia desde un punto de vista matemático, *Baudhaiana* (BSS), *Manavá* (MSS), *Apastamba* (ASS) y *Katiaiana* (KSS), aunque también haremos una breve mención de *Satapatha Brahmana* (SB). La datación exacta de los *Shulba-sutras* es incierta, pero hay relativo consenso en que el más antiguo es *Baudhaiana* que fue compuesto entre el 800 y el 600 a.e.c. Posteriores son *Manavá* y *Apastamba*, datados entre el 650 y el 300 a.e.c., y el más moderno es *Katiaiana*, compuesto entre el 300 y el 200 a.e.c. Según autores estas fechas pueden variar, pero no así su ordenacion por antigüedad. *Satapatha Brahmana* fue escrito entre el 700 y el 300 a.e.c.

La raíz *sulv* significa *medir* y el nombre de *Shulba-sutra* podría entenderse como *teoría de la medida*. La palabra *shulba* también significa *cuerda* en sánscrito, que era uno de los instrumentos más comunes para hacer mediciones, de forma que *Shulba-sutra* sería *regla de cuerdas*. En los textos se emplea la palabra *rajju* para indicar cuerda, lo cual sugiere que el nombre de *Shulba-sutra* quería transmitir el concepto de medida y que el significado de *shulba* como cuerda apareció posteriormente.

Como todos las disciplinas de los *Vedas*, los *Shulba-sutras* están escritos por medio de *sutras*, un estilo aforístico caracterizado por frases cortas con nombres a menudo compuestos y de gran longitud, y ausencia de verbos. Con posterioridad y por comodidad el texto fue dividido en segmentos numerados y agrupados en capítulos. Así, *Baudhaiana* contiene 21 capítulos y 285 *sutras*, *Manavá* 16 capítulos y 228 *sutras*, *Apastamba* 21 capítulos y 202 *sutras* y *Katiaiana* 6 capítulos y 67 *sutras*. En todo caso, hay un considerable solapamiento en los contenidos de los diferentes *Shulba-sutras* indicando que los textos eran la exposición de un tronco de conocimiento común.

Haremos uso del contenido geométrico de los *Shulba-sutras* relacionado con figura circulares para obtener diferentes aproximaciones del valor de π en la Antigua India. Sin embargo, hay que dejar claro desde el principio que los *Shulba-sutras* no se tratan de textos propiamente matemáticos: ni son la recopilación de problemas o tablas de cálculos o de constantes; ni buscan recoger el saber matemático del momento; ni tampoco son textos para la enseñanza de las matemáticas. Todo lo contrario, su estilo aforístico dificulta en gran medida su entendimiento y muchas veces presentan problemas cuya regla de resolución es de gran complejidad sin haber previamente mostrado un problema afín más sencillo. A la complejidad en el entendimiento de los textos hay que añadir que la unidad de medida lineal y de área era referidas con la misma palabra, y su significado se determinaba por el contexto.

EL VALOR DE π IMPLICTO EN LOS SHULVA-SUTRAS

La conceptualización de π como la constante que relaciona el diámetro de una circunferencia y su longitud no está explícitamente indicado en ninguno de los textos védicos, aunque de alguna forma esta noción está implícita al construir figuras semejantes. Además, esta conceptualización ya la encontramos en otros civilizaciones más antiguas como son la Babilónica y la Egipcia, y aunque no hay pruebas, si hay bastante evidencia de transmisión de conocimientos entre las civilizaciones Babilónicas e India.

En general las reglas que asumen un valor implícito de π están relacionadas con la comparación de cuadrados y círculos semejantes (de igual área), o con la transformación de un cuadrado en un círculo semejante y *viceversa*.

El problema de cuadrar el círculo y su inverso pueden rastrearse hasta tiempos tan remotos como el tercer milenio a.e.c. en el *Rig-veda* y estaba vinculado a la construcción de los tres altares elementales de sacrificio, denominados *Garhapatya*, *Ahavaniya* y *Daksinagni*. Los tres altares tenían la misma área pero diferente forma, siendo el primero circular, el segundo cuadrado y el tercer altar semicircular. La primera mención expresa a estos altares rituales se encuentra en *Satapatha-Brahmana* y se repite constantemente en los *Sutras*. Con independencia de la forma, en SB se indica que el área de estos altares es usualmente de un *parusa*[1] al cuadrado (aproximadamente cuatro metros cuadrados). Estos altares consistían principalmente en tarimas construidas con ladrillos de diferentes tamaños, y los sacerdotes tenían que saber como transformar un altar en otro. Por ejemplo, como transformar una tarima cuadrada en otra circular de la misma área, usando los mismos ladrillos. Dado que la nueva construcción se hacia *in situ*, ayudándose posiblemente por una simple cuerda, la transformación debía obtenerse de forma geométrica, usando el mínimo posible de cálculos.

Como excepción a lo arriba indicado, en BSS I.113 se da de forma explícita la relación entre el diámetro de una circunferencia y su longitud, que lleva a un valor implícito de π igual a 3. En el texto se indica, siguiendo a Kulkarni (1978), que el diámetro de un *yupa* (poste de sacrificios) es de un *pada* (pie); la circunferencia del hoyo en el cual se tiene que fijar el *yupa* es de 3 *padas*. Por tanto, el valor de π es 3. En Datta (1993) también se hace referencia a esta aproximación.

En todo caso, el objetivo de este artículo es identificar el valor implícito de π que se obtiene con cada regla de transformación entre altares, como medida del grado de precisión en la Antigua India en el cálculo de áreas de círculos. Veremos que hay un gran número de reglas, algunas simples y otras complejas, unas se encuentran en todos los *Shulba-sutras* y otras sólo en uno de ellos. De cada regla se derivará una estimación de π, otorgándole la menos precisa un valor de 3 y las más precisa un valor de 3,125. Al final del artículo se muestra una tabla con la recopilación de todas las estimaciones.

El listado de reglas de transformación es extenso pero no exhaustivo. Empezaremos por las comparaciones entre cuadrados y círculos semejantes, para después ver las reglas de transformación de un cuadrado a un círculo, y finalizar con las reglas de transformación inversa.

Comparación de cuadrados y círculos semejantes

<u>Primera comparación</u>

En MSS I.27 se indica que un cuadrado de lado 2×2 *aratnis* es equivalente a un círculo de radio un *aratni* y tres *angulas* (Datta, 1993; Kulkarni, 1978). Teniendo

[1] La relación entre las unidades de medida que aparecen en los *Shulba-Sutras* es (asumiendo que coinciden con las de los *Brahmanas*):

1 *parusa* = 1 *vyama* = 5 *aratnis* = 8 *padas* = 10 *pradesas* = 120 *angulas*.

Además, *parusa* es a la vez una medida lineal y de área. Como medida lineal se puede tomar como valor aproximado el de la altura de un hombre con los brazos en alto (digamos que 2 metros), así que como medida de área equivaldría a 4 metros cuadrados. (Kak, 1993) presente que 1 *aratni* equivale a 24 *angulas* (véase nota 1), se tiene que, $4 = \pi\left(1+\frac{1}{8}\right)^2$ y por tanto,

$$\pi = \frac{256}{81} \approx 3{,}1605.$$

Esta estimación de π coincide con la que se obtiene con el método de cálculo de áreas seguido en el Antiguo Egipto, aunque no hay ninguna evidencia de que haya habido transferencia de conocimiento.

Segunda comparación

En MSS se lee (Kulkarni, 1978) que las dimensiones de los altares *Garhapatya*, *Ahavaniya* y *Daksinagni* son las siguientes: el *Ahavaniya* es un cuadrado de lado 1 *aratni*; el *Garhapatya* es un círculo de radio 14 *angulas* menos 1 *yava*; y el *Daksinagni* es un semicírculo de radio 19,5 *angulas*. Además, se indica que sus áreas son iguales.

Sabiendo que 1 *aratni* son *24 angulas*, y que 1 *yava* es 1/8 *angulas*, se tiene que:

Área *Ahavaniya* = área *Garhapatya*, es decir $24^2 = \pi\left(14-\frac{1}{8}\right)^2$, de donde se obtiene que,

$$\pi = \frac{4.096}{1.369} \approx 2{,}9920.$$

Área *Ahavaniya* = área *Daksinagni*, es decir $24^2 = \pi\frac{19{,}5^2}{2}$, de donde se obtiene que,

$$\pi = \frac{4.608}{1.521} \approx 3{,}0296.$$

Tercera comparación[2]

En *Satapatha Brahmana*, párrafos 7.1.1.18-31 se describe la construcción del altar circular *Garhapatya* (Kak, 1993). Diferentes textos en los *Shulba-sutras* indican que este altar tiene la misma área que el altar cuadrado *Ahavaniya*, ambos de un *vyama* (o un *parusa*, equivalente a 120 *angulas*).

[2] Existen bastantes textos (o páginas web) donde se indica que en SB determinados *sutras* de contenido astronómico llevan a un valor implícito de π igual a $339/108$, aproximadamente 3.1389. Esta aproximación sería la mas precisa de todas las contenidas en los *Shulba-sutrsa*. Sin embargo, no he podido localizar ninguna fuente donde se indique a que *sutras* del SB se hace referencia, ni ninguna fuente bibliográfica que muestre el procedimiento seguido para llegar a esta aproximación. Es por ello que no la he tenido en cuenta.

El texto describe la construcción de un cuadrado formado por dos tipos de ladrillos, unos de 24x24 *angulas* al cuadrado y otros de 48x24 *angulas* al cuadrado. La figura final (véase Figura 1) sería un cuadrado de lado 4x24 *angulas*, o $\frac{4}{5}$ *parusa*. El *Garhapatya* sería el círculo que circunscribe este cuadrado, con un diámetro de $\frac{4\sqrt{2}}{5}$ *parusa*, la diagonal del cuadrado. Como el área se sabe igual a un *parusa*, se tiene que $\pi\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)^2 = 1$, lo que nos lleva a que

$$\pi = \frac{25}{8} = 3{,}125.$$

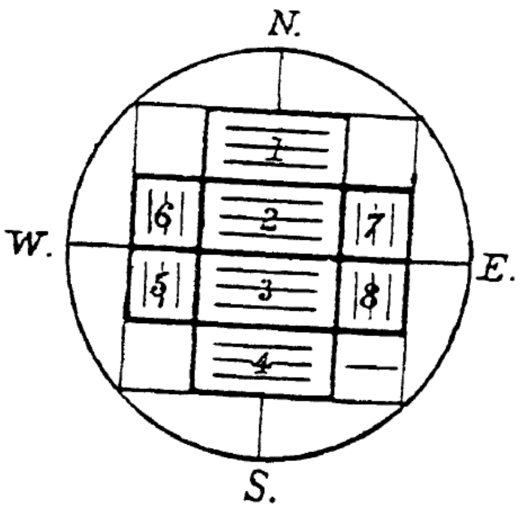

Figura 1: Regla para hacer un altar *Garhapatya*, de área un *parusa*, como círculo circunscrito a un cuadrado de lado $4/5$ *parusa*.

Transformar un cuadrado en un círculo

En los *Shulba-sutras* se encuentran varias reglas que permiten obtener un círculo con igual superficie que un cuadrado dado. El estilo aforístico de algunos *sutras* lleva a que su interpretación dependa del investigador, derivándose de cada una un valor implícito de π diferente. En estos casos se ofrecerán las interpretaciones sin entrar a valorarlas. En algunos casos en el escrito ya se indica que la regla es aproximada, por lo que cabe esperar una estimación del valor implícito de π peor que la obtenido con otras reglas.

<u>Primera transformación</u>

La primer regla que se ofrece se encuentra descrita de forma similar en los cuatro *Shulba-sutras*: BSS 2.9, MSS 10.1.1.8, MSS 10.3.2.10, ASS 3.2 y KSS 3.11. El texto indica aproximadamente (traducido desde la versión en ingles del texto ASS 3.2 que se encuentra en Plofker, 2008)[3]:

> *Se desea hacer un [cuadrado] cuadrilátero en un círculo. Lleva [una cuerda] desde el centro a la esquina [del cuadrado]. [Entonces] estira[la] hacia un lado, dibuja un círculo con [radio igual al semi-lado] más un tercio del exceso [de la semi-diagonal que sobrepasa el semi-lado]. Este es definitiva[mente] el [radio del] círculo. Tanto como se añade [a los bordes del círculo] es quitado [de las esquinas del cuadrado].*

En la Figura 2a se muestra la transformación descrita: dado un cuadrado de lado a, el radio r del círculo semejante es la mitad del lado más un tercio de lo que excede la mitad de la diagonal del cuadrado respeto de la mitad de su lado. Es decir, $OC + \frac{1}{3}CB$ o

$$r = \frac{a}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}a}{2} - \frac{a}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{6}a.$$

Como ambas figuras tienen la misma área, $a^2 = \pi r^2$, se deduce, tras las correspondientes simplificaciones, que

$$\pi = 18\left(3 - 2\sqrt{2}\right) \approx 3{,}0881.$$

Dani (2010) indica que la última frase de la descripción "Tanto como se añade es quitado" puede ser un indicio de cómo se ha llegado a la elección del radio realizada. Al observar que el diámetro debe de estar comprendido entre el lado del cuadrado y su diagonal, se habría buscado un valor intermedio de forma que el área de las esquinas del cuadrado que queda fuera del círculo sea semejante al área incorporada al círculo en los lados. Este valor intermedio se fija en un tercio de la diferencia entre la semi-diagonal y el sem-lado, cuando la proporción exacta es 0.309. Así, si se hubiera elegido la proporción de $3/10$ se habría alcanzado una mayor precisión.

Algunos autores consideran que el grado de precisión en el valor implícito de π depende de la aproximación que se use para $\sqrt{2}$, y en los *Shulba-sutras* hay muchas aproximaciones[4]. Creo que este enfoque es equivocado dado que la *circulatura* del cuadrado es un ejercicio geométrico (de regla y compas) y nunca algebraico. En los textos no se indica ninguna constante que relacione el lado del

---

[3] En Katz *et alia* (2007), aparece una traducción del texto de BSS 2.9 que dice aproximadamente: *Si se desea transformar un cuadrado en un círculo, [una cuerda de longitud] la mitad de la diagonal [del cuadrado] se estira desde el centro al este [una parte de ella cayendo fuera del lado este del cuadrado]; con un tercio [de la parte que cae fuera] añadida al resto [de la mitad de la diagonal], el círculo [requerido] es dibujado.*

[4] La mejor aproximación para $\sqrt{2}$ encontrada en los *Shulba-sutras* es $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 34}$, pero otras aproximaciones implícitas para esta raíz incluyen $7/5$, $10/7$, $36/25$, etc. (Gupta, 1993)

cuadrado con el radio del círculo, y tampoco se da un valor numérico al lado del cuadrado para luego obtener el radio del círculo semejante. En definitiva, no son ejercicios matemáticos, sino procedimientos geométricos para transformar un altar real, hecho con ladrillos, en otro circular.

En MSS 11.9-10 se describe una regla equivalente, pero que implica una construcción ligeramente distinta (Gupta, 1993). Según esta (véase Figura 2b), el diámetro del círculo OB es igual al lado del cuadrado OC más un tercio de la diferencia entre la diagonal del cuadrado y su lado $\frac{1}{3}(OA - OC) = \frac{1}{3}CE$, dado que $OA = OE$. Es decir, $OB = OC + \frac{1}{3}CE$, o

$$2r = a + \frac{1}{3}\left(\sqrt{2}a - a\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{3}a.$$

Por tanto, el círculo obtenido es el mismo que el aproximado según la regla previa, al igual que la estimación de π.

<u>Segunda transformación</u>

En MSS 10.3.2.15 se lee otra regla de transformación de un cuadrado a un círculo semejante que ha dado lugar a diversas interpretaciones según autores. El texto indica aproximadamente (traducido desde la versión en ingles que se encuentra en Kulkarni, 1978):

> *Se divide el cuadrado en nueve partes los segmentos (del circulo circunscrito) en tres partes cada uno (por la extensión de las longitudes de las partes del cuadrado), se quita una quinta parte de la altura (de la línea de extensión medida desde su mitad), junto con el resto (el círculo de radio la línea desde el centro a la marca en la quinta parte será) tan grande como (el cuadrado).*

Veamos las interpretaciones realizadas de este texto por Kulkarni (1978) y Dani (2010). Para ambos autores, se comienza dividiendo el cuadrado en nueve cuadrados más pequeños al dividir cada lado del cuadrado original en tres partes iguales (véase Figura 2c). Posteriormente se extiende el segmento AB que han dividido el cuadrado hasta cortar el círculo circunscrito en el punto D. A partir de aquí los autores difieren en su interpretación.

Para Kulkarni el proceso continua como sigue: se considera el segmento extendido pero comenzando este desde la mitad del cuadrado CD, y a este se le quita un quinto, siendo el radio del círculo semejante los cuatro quintos restantes. Es decir, el radio es cuatro quintos del segmento CD.

Dani, después de discutir las ambigüedades encontradas en el texto, interpreta de forma muy diferente el proceso de *eliminación* de un quinto. Para él se identifica el punto E en el segmento BD que lo divide en cinco partes iguales, y el radio sería el segmento OE que va del centro del cuadrado al punto E.

Veamos a que estimaciones de π nos lleva cada interpretación. Según Kulkarni, si el cuadrado tiene lado a, el radio del círculo circunscrito mide $R = a/\sqrt{2}$, el segmento AB mide a unidades, el segmento OC mide $a/6$ unidades, y el segmento CD mide $\sqrt{R^2 - (a/6)^2} = \frac{\sqrt{17}}{6}a$ (por el Teorema de Pitágoras). Por tanto, el radio r del círculo semejante es,

$$r = \frac{4}{5}CD = \frac{4}{5}\frac{\sqrt{17}}{6}a = \frac{2\sqrt{17}}{15}a.$$

De aquí se deduce, tras las correspondientes simplificaciones, que

$$\pi = \frac{225}{68} \approx 3{,}3088.$$

Según Dani, como CD mide $\frac{\sqrt{17}}{6}a$, entonces BD es $\frac{\sqrt{17}}{6}a - \frac{a}{2}$. Así el segmento BE, que es $\frac{1}{5}BD$, mide $\left(\frac{\sqrt{17}}{30} - \frac{1}{10}\right)a$ y el segmento CE sería $\left(\frac{2}{5} + \frac{\sqrt{17}}{30}\right)a$. De nuevo por el Teorema de Pitágoras se tiene que el cuadrado del radio del círculo buscado OE^2, mide $OC^2 + CE^2$, es decir,

$$r^2 = \left(\frac{a}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} + \frac{\sqrt{17}}{30}\right)^2 a^2 = \frac{31+4\sqrt{17}}{150}a^2.$$

De aquí se deduce que

$$\pi = \frac{150}{31+4\sqrt{17}} \approx 3{,}1584,$$

mucho más preciso que el estimado a partir de la interpretación de Kulkarni.

A estas dos interpretaciones se añade una tercera debida a Gupta (1993) mucho más sencilla y, en este sentido, más verosímil por su cercanía a las reglas usadas en la Antigua India. Según Gupta, el lado extendido haría referencia al segmento que iría desde el centro del cuadrado hasta tocar el círculo circunscrito, es decir la mitad de la diagonal del cuadrado; y para obtener el radio del círculo habría que quitar a es este lado extendido un quinto. Por tanto,

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2}a - \frac{1}{5}\frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{2\sqrt{2}}{5}a.$$

De aquí se deduce que

$$\pi = \frac{25}{8} = 3{,}125,$$

la mejor aproximación de π obtenida de la reglas de transformación en los *Shulba-sutra*.

Tercera transformación

En MSS 10.1.1.8 se indican los pasos para construir un semicírculo semejante a un cuadrado dado (Kulkarni, 1978). Las instrucciones son las siguientes: dado un cuadrado se construye un círculo de igual área con el mismo centro que el cuadrado. Ahora se dibuja el cuadrado que circunscribe al círculo. Considera el segmento que va del centro de la figura a una esquina de este segundo cuadrado. La medida de este segmento es el radio del semicírculo buscado.

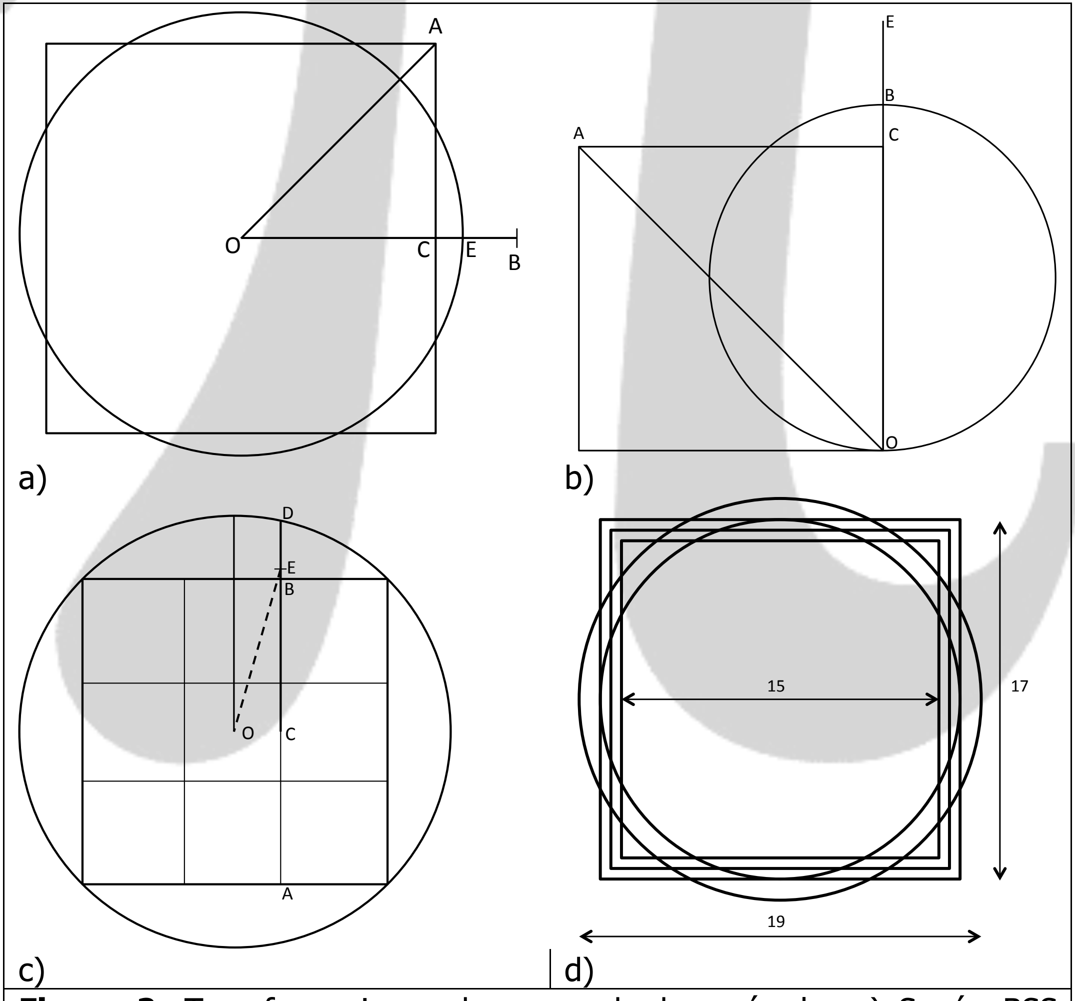

Figura 2: Transformaciones de un cuadrado a círculo: a) Según BSS 2.9, MSS 10.1.1.8 y 10.3.2.10, ASS 3.2 y KSS 3.11; b) Según MSS 11.9-10; c) Según MSS 10.3.2.15; d) Según BSS 16.8-12.

No es difícil comprobar que la estimación de π implícita en este procedimiento de transformación de un cuadrado en un semicírculo semejante es la misma que la estimación que se use en el primer paso, cuando se obtiene el círculo semejante. Su interés radica en ser uno de los pocos procedimientos que involucran el altar *Daksinagni*, de forma semicircular.

Sea a el lado del cuadrado. Si asumimos que para la construcción del círculo semejante se usa la implícitamente un valor de $\pi = \hat{\pi}$ se tiene que el radio del círculo semejante es $\frac{1}{\sqrt{\hat{\pi}}}a$, y el lado del cuadrado circunscrito será su doble $\frac{2}{\sqrt{\hat{\pi}}}a$. Dado que el radio del círculo buscado es la semidiagonal de este cuadrado se tiene que $r = a\sqrt{2/\hat{\pi}}$. Comparando las áreas del cuadrado inicial a^2 y del semicírculo $\frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{\hat{\pi}}a\right)^2 = \frac{\pi}{\hat{\pi}}a^2$ se tiene que $\pi = \hat{\pi}$, que es la misma aproximación que se ha usado en la primera *circulatura* del cuadrado.

Cuarta transformación

Kak (1997) hace una análisis de la transformación de un cuadrado en un círculo (una rueda de carro), descrita en BSS 16.8-12 y no exenta de ambigüedad. La traducción desde la versión en ingles del texto que se encuentra en Kak (1997) sería:

> *Con 225 de ellos [ladrillos] se construye el [altar] siete veces con dos aratnis y [un] pradesa. (16.8)*
>
> *A estos [225] otros 64 [ladrillos] son añadidos y con ellos un cuadrado hecho. (Al principio) se hace un cuadrado con un lado conteniendo 16 ladrilllo, dejando libre 33 ladrillos. Estos son colocados en todos los lados. (16.9)*
>
> *16 (ladrillos) en el centro constituyen la nave; 64 (ladrillos, después de eso) constituyen los radios y 64 los espacios vacíos (entre los radios); los restantes (ladrillos) forma la llanta. (16.10)*
>
> *…el exterior y el interior encierran la llanta hecho en círculos… (16.11)*
>
> *Después de dividir la llanta en 64 partes iguales y dibujar las líneas, un círculo es dibujado por el medio (de la llanta). (16.12)*

El primer párrafo (16.8) habla de un cuadrado de lado 15 que precisa de 225 ladrillos. Cada ladrillo tiene una superficie de $\frac{1}{30}$ *parusa* al cuadrado, lo que da un área de 7.5 *parusa* al cuadrado o 7 *parusa* más dos *aratnis* y un *pradesa* (dos *aratnis* y un *pradesa* es igual a medio *parusa*).

En el segundo párrafo (16.9) se indica que a los 225 ladrillos se añaden 64 más: de estos 31 se juntan con los 225 iniciales para formar un cuadrado de lado 16 ($16^2 = 225 + 31$) y posteriormente se añaden los restantes 33 ladrillos que son *colocados en los lados* frase ambigua por no describir que figura se forma. Según Sen y Bag (1983), los 33 ladrillos restantes se usan para formar un tercer cuadrado de lado 17, $17^2 = 225 + 64$. Para Kak la figura final formada es un círculo de diámetro 17 unidades, cuya descripción se hace en los dos párrafo siguientes.

Así, el tercer párrafo (16.10) describe el diseño en forma de rueda de carro, con la nave en el centro, los radios y huecos en el medio, y la llanta en el exterior; y el párrafo 16.11 indica que la llanta queda encerrada entre dos círculos, el menor de los cuales sería el de diámetro 17. Kak interpreta estos dos párrafos como una reiteración y descripción más detallada del círculo formado según se describe en el párrafo 16.9.

Si es así, se han construido dos círculos (véase Figura 2d). El menor es semejante al cuadrado inicial de lado 15 y tiene un diámetro 17, por tanto $15^2 = \pi\left(\frac{17}{2}\right)^2$ dando lugar a la estimación,

$$\pi = \frac{900}{289} \approx 3{,}1142.$$

Además, se habla de otro círculo exterior, formado a partir del cuadrado de lado 17 y que tendría de diámetro 19 (de nuevo dos unidades más que el lado del cuadrado generador). Se podría objetar, siguiendo a Kak (1997), que para formar este segundo círculo exterior no es necesaria la primera transformación de cuadrado a círculo. Pero aparentemente si es necesario este círculo menor por el medio de la llanta, tal y como se indica en el último párrafo (16.12). Aunque la indicación de *en medio* no está especificada con precisión, parece claro que se trata del círculo de diámetro 17.

El círculo exterior de lado 19, semejante al cuadrado de lado 17, supone que $17^2 = \pi\left(\frac{19}{2}\right)^2$ dando un valor estimado de

$$\pi = \frac{1.156}{361} \approx 3{,}2022.$$

En MSS aparece descrita otra construcción de una rueda de carro a partir de 344 ladrillos. Aunque el texto es confuso, parece que da lugar a una estimación de $\pi = \frac{1.075}{344} = 3{,}125$.

Estos dos aproximaciones de un círculo a un cuadrado añadiendo dos unidades al lado del cuadrado son dos de las tres mejores posibles. La mejor es la interpretación que se hace de la regla de cálculo de áreas de círculos usada en el Antiguo Egipcio, donde el cuadrado tendría lado 16 y el circulo semejante un diámetro de 18.

Quinta transformación

Gupta (1993) indica que hay cierta evidencia de que la siguiente transformación también era conocida en la Antigua India: el radio del círculo es la mitad del lado del cuadrado más un octavo de este. Según la Figura 2a, $OE = OC + \frac{1}{8}OC$, de forma que,

$$r = \frac{a}{2} + \frac{1}{8}\frac{a}{2} = \frac{9}{16}a,$$

y

$$\pi = \frac{256}{81} \approx 3{,}1605.$$

De nuevo nos encontramos con una transformación que lleva implícito un valor de π igual al estimado en el Antiguo Egipto.

Transformar un círculo en un cuadrado

La transformación inversa, de círculo a cuadrado semejante (cuadratura del círculo), también aparece en los *Shulba-sutras* y nos permite obtener nuevas estimaciones de π.

Primera transformación

La siguiente regla, de una gran sencillez, se encuentra en los cuatro *Shulba-sutras*: BSS 2.11, MSS 10.3.2.12, ASS 3.3 y KSS 3.12. El texto indica aproximadamente (traducido desde la versión en ingles del texto ASS 3.3 que se encuentra en Plofker 2008)[5]:

> *Se desea [transformar] un círculo a un [cuadrado] cuadrilátero: dividir el diámetro en quince partes, eliminar dos. Trece [partes]*

[5] En Plofker (2007), aparece una traducción del texto en BSS 2.11 que dice aproximadamente: *…divide [el diámetro] en quince partes y redúcelo en dos de ellas; esto da el lado aproximado del cuadrado [deseado]. Véase también Kulkarni (1978).*

queda. Este es clara [y aproximadamente] el [lado del cuadrado] cuadrilátero.

Dado un círculo de diámetro d, el cuadrado semejante tiene de lado $a = \frac{13}{15}d$ (véase Figura 3a). Así el área del círculo seria $\frac{\pi d^2}{4}$ y la del cuadrado $\left(\frac{13}{15}d\right)^2$. Como las áreas son iguales se tiene que,

$$\pi = \frac{676}{225} \approx 3{,}0044.$$

Se menciona de forma explícita que esta es una relación de semejanza aproximada, por tanto, el valor de π implícito también será aproximado y peor que el obtenido a partir de otras reglas de transfornación.

<u>Segunda transformación</u>

En BSS 2.10 se describe un método alternativo para transformar un círculo en un cuadrado (traducido desde la versión en ingles del texto que se encuentra en Plofker):

Para transformar un círculo en un cuadrado, el diámetro es dividido en ocho partes, una [de tales] partes después de ser dividida en veintinueve partes es reducida por veintiocho de ellas y después por un sexto [de la parte restante] menos un octavo [de la sexta parte].

El texto es confuso, pero indica que dado un círculo de diámetro d, el cuadrado semejante tiene de lado,

$$a = \left(\frac{7}{8} + \left(\frac{1}{8} - \left(\frac{28}{8\cdot 29} + \frac{1}{8\cdot 29}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6\cdot 8}\right)\right)\right)\right)d,$$

que podemos simplificar hasta,

$$a = \left(\frac{7}{8} + \frac{1}{8\cdot 29} - \frac{1}{8\cdot 29\cdot 6} + \frac{1}{8\cdot 29\cdot 6\cdot 8}\right)d = \frac{9.785}{11.136}d = \frac{9.785}{5.568}r.$$

De aquí, igualando el área del círculo con la del cuadrado, se deduce que,

$$\pi = \left(\frac{9.785}{5.568}\right)^2 \approx 3{,}0883.$$

El método para derivar la relación previa entre el lado del cuadrado y el radio del círculo es pura conjetura. Algún autor apunta que la fracción obtenida no es sino la inversa de la obtenida en BSS 2.9 (véase la Primera Transformación en Transformación de un cuadrado en un círculo) y justifican esta interpretación en dos hechos: ambas transformaciones aparecen en BSS de forma consecutiva; y si uno empieza con un cuadrado y lo transforma en un círculo según BSS 2.9, y a este le aplica la transformación en BSS 2.10, obtendrá un cuadrado muy similar al original. Obsérvese que los valores implícitos de π en BSS 2.9 y 2.10 son prácticamente idénticos.

Dani (2010) ofrece una posible explicación al método que posibilita pasar de la relación entre el lado de un cuadrado y el diámetro del círculo semejante según BSS 2.9, a su (casi)inversa mostrada en BSS 2.10. En BSS 2.9 se obtiene que $d = a\frac{2+\sqrt{2}}{3}$. Para $\sqrt{2}$ en BSS se indica una fórmula aproximada (BSS 2.12) con el valor de $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 34}$, que convertiría el cociente $\frac{2+\sqrt{2}}{3}$ en $1+\frac{1}{9}+\frac{1}{9\cdot 4}-\frac{1}{9\cdot 4\cdot 34}$. A partir de aquí, y según Dani, se calcula su inverso como $\frac{7}{8}$ más una determinada fracción que se aproxima por $\frac{1}{8\cdot 29}-\frac{1}{8\cdot 29\cdot 6}+\frac{1}{8\cdot 29\cdot 6\cdot 8}$. El valor inverso exacto no se puede obtener a través de fracciones unitarias debido a que aparece un denominador primo. Veamos en detalle donde radica la dificultad haciendo uso de nuestra notación, que por descontado estaba lejos del conocimiento de la época. El cociente a ser invertido es $\frac{1.393}{1.224}$ y daría lugar a $\frac{1.224}{1.393}$. Pero como el denominador es primo no es posible descomponer este cociente en fracciones unitarias. Ahora bien, se tiene que $\frac{1.224}{1.393}=\frac{7}{8}+\frac{41}{1.393\cdot 8}$. Si la segunda fracción la aproximamos por $\frac{41}{1392\cdot 8}$, ahora si la podemos descomponer en fracciones unitarias como $\frac{1}{8\cdot 29}-\frac{1}{8\cdot 29\cdot 6}+\frac{1}{8\cdot 29\cdot 6\cdot 8}$. Pero claro, todo esto desde nuestros conocimientos actuales. A saber como dedujeron en la Antigua India el método dado en BSS 2.10 y si realmente lo entendían como el inverso del dado en BSS 2.9.

También se apunta en Dani (2010) que si se hubieran considerado sólo los dos primeros términos, $\frac{7}{8}+\frac{1}{8\cdot 29}$, se hubiera llegado al cociente $\frac{51}{58}$ que lleva al valor implícito $\pi = \left(\frac{51}{29}\right)^2 \approx 3{,}0927$ más exacto.

Esta regla mencionada en BSS (el *Shulba*-sutra más antiguo) no se encuentra en los restantes, ASS, KSS y MSS. Quizás su forma tan complicada es la razón de su aparente impopularidad, máxime cuando la sencillez de la primera regla hace innecesaria cualquier otra con propósitos prácticos. Recordemos, una vez más, que no estamos ante tratados matemáticos y sólo se desea una regla simple y geométrica de transformación de altares.

Tercera transformación

En MSS 3.2.10 se hace referencia a una transformación del círculo a un cuadrado. El *Sutra* es muy condensado y difícil de interpretar. Según Hayashi (1990) el lado del cuadrado sería la altura del triángulo equilátero de base el diámetro del círculo. (Véase Figura 3b). Con esta interpretación, se tendría que $a = \sqrt{3}r$ y por consiguiente que $\pi = 3$, una aproximación demasiado burda máxime cuando en el mismo MSS se dan reglas de transformación más precisas. Ahora bien, estas anomalías no son raras en los *Shulba-sutras*.

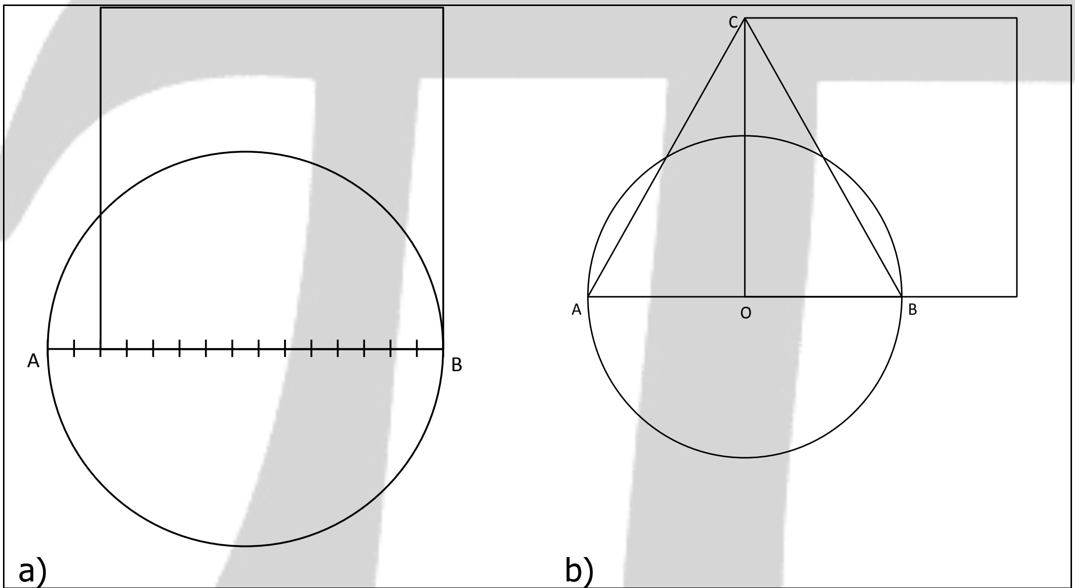

Figura 3: Transformación de un círculo en cuadrado: a) Según BSS 2.11, MSS 10.3.2.12, ASS 3.3 y KSS 3.12; b) Según MSS 3.2.10.

Tabla resumen de las estimaciones obtenidas

Finalizamos con una tabla que resume las diferentes relaciones establecidas entre el lado de un cuadrado a y el radio de un círculo r así como los valores exactos y aproximados de π que de ellas se deducen.

Shulba-Sutra	**Relación entre a y r**	**π (exacto)**	**π (aprox.)**
BSS I.113		3	3
MSS I.27		256/81	3,1605
MSS		4.096/1.369	2,9920
MSS		4.608/1.521	3,0296
Satapatha Brahmana		25/8	3,125
BSS 2.9, MSS 10.1.1.8, MSS 10.3.2.10, MSS 11.9-10, ASS 3.2 KSS 3.11	$r=\frac{2+\sqrt{2}}{6}a$	$18(3-2\sqrt{2})$	3,0881
MSS 10.3.2.15 (Kulkarni)	$r=\frac{2\sqrt{17}}{15}a$	225/68	3,3088
MSS 10.3.2.15 (Dani)	$r^2=\frac{31+4\sqrt{17}}{150}a^2$	$\frac{150}{31+4\sqrt{17}}$	3,1584
MSS 10.3.2.15 (Gupta)	$r=\frac{2\sqrt{2}}{5}a$	25/8	3,125
BSS 16.8-12		900/289	3,1142
BSS 16.8-12		1.156/361	3,2022
MSS ¿?		1.075/344	3,125
¿? (Gupta)	$r=\frac{9}{16}a$	256/81	3,1605
BSS 2.11, MSS 10.3.2.12, ASS 3.3, KSS 3.12	$a=\frac{26}{15}r$	676/225	3,0044
BSS 2.10	$a=\frac{9.785}{5.568}r$	$\left(\frac{9.785}{5.568}\right)^2$	3,0883
MSS 3.2.10	$a=\sqrt{3}r$	3	3

Bibliografía

Dani, S. G. (2010), *Studies in the History of Indian Mathematics*, editado por C. S. Seshadri, Chennai Mathematical Institute, Tamil Nadu, India.

Datta, B. (1993), *Ancient hindu geometry*, Cosmo publications, New Delhi, India.

Gupta, R. C. (1993), *Sundararaja's improvements of vedic circle-square conversions*, Indian Journal of History of Science, vol 28(2), 81-101.

Hayashi, T. (1990), *A new Indian rule for the squaring of a circle: Manava Sulvasutra 3.2.9-10*, Ganita Bharati 12(3-4), 75-82.

Kak, S. C. (1993), *Astronomy of the Satapata Brahmana*, Indian Journal of History of Science, vol 28(1), 16-34.

Kak, S. C. (1997), *Three old induan values of π*, Indian Journal of History of Science, vol 32(4), 307-314.

Katz, V.J., Imhausen, A., Robson, E., Dauben, J. W., Plofker, K. y Berggren, J. L. (2007) The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, and Islam. A Sourcebook, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, EE.UU.

Kulkarni, R. P. (1978), *The value of π known to sulbasutrakaras*, Indian Journal of History of Science, vol 13(1), 32-41.

Pofker, K. (2008), *Mathermatics in India*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, USA.

Sen, S. N. y Bag, A.K. (1983), *The Sulbasutras*, Indian national Science Academy, New Delhi.

Srinivasiengar, C. N. (1967), *The History of Ancient Indian Mathematics*, World Press.