π en el antiguo imperio chino

Iván Arribas (ivan.arribas@uv.es)

INTRODUCCIÓN

Las matemáticas en China se desarrollaron de forma independiente al de otras antiguas civilizaciones, como la egipcia, la babilónica o, más tarde, la griega, pudiendo datarse sus orígenes hacia el siglo XI a.e.c. Así, los matemáticos chinos ya manejaban números grandes, negativos y decimales, tenían un sistema posicional decimal, y amplios conocimientos en álgebra y geometría.

La información que tenemos de la matemática china anterior al periodo imperial[1] es muy fragmentada. Los textos más relevantes aparecen hacia el siglo tercero a.e.c. y son copias comentadas de textos mucho más antiguos. Estos son, a su vez, el resultado de la recopilación de obras de diferentes autores que contienen los conocimientos matemáticos adquiridos en los siglos precedentes. Así, resulta difícil fechar el origen de muchos resultados.

Este trabajo refleja mis intereses, mis puntos fuertes y mis punto débiles. No es una disertación académica, ni exhaustiva, sino una obra de lectura, no de consulta, pero no renuncia al rigor que se echa en falta en otras obras divulgativas. Está dirigida a toda persona interesada por la evolución del concepto de π y que quiere profundizar en su conocimiento escapando de los tópicos usuales. No pretendo condensar todo el conocimiento matemático de un periodo de más de dos mil años, sólo aquel directamente relacionado con mis intereses. Soy responsable de cualquier error o mala interpretación.

[1] El periodo imperial en China se inicia con Qin Shi Huang, gobernador del Estado Qin, que creó el primer estado chino unificado en el año 221 a.e.c. Posteriormente llegó la dinastía Han, que gobernó China durante los años 206 a.e.c. a 220 e.c. y creó una identidad cultural entre su población que se extiende hasta la actualidad.

BREVE RESEÑA HISTÓRICA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA ANTIGUA CHINA

El inicio de las matemáticas

Las primeros símbolos matemáticos aparecen escritos en caparazones de tortugas y corresponden a la Dinastía Shang, 1600-1050 a.e.c. (véase Figura 1). Como en otras civilizaciones de la antigüedad, el desarrollo de las matemáticas está asociado al de la astronomía, qué servía para perfeccionar el calendario, y a la resolución de muy diversas tareas prácticas.

Una de las principales tareas de los astrónomos chinos en la antigüedad era preparar el calendario: conocer el inicio de las estaciones, designar por adelantado días señalados, tabular el movimiento de los planetas y la luna, predecir los eclipses lunares y, más difícil e importante, los eclipses solares.

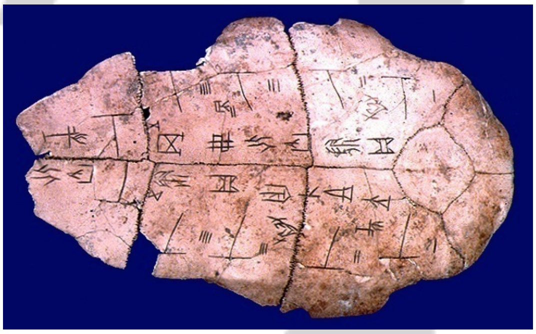

Figura 1: Símbolos matemáticos en el caparazón de una tortuga. Dinastía Shang.

La relativa sencillez de nuestro calendario Gregoriano permite conocer con total precisión cual será el calendario para un año dado (si es o no bisiesto, días de cada mes, día de la semana…). Sin embargo, la naturaleza luna-solar del calendario en la antigua China hacia esta tarea mucho más difícil y el desarrollo de las matemáticas facilitaba la tarea a los astrónomos.

Los matemáticos de la antigua China no desarrollaron ninguna aproximación axiomática, sino que crearon reglas para la resolución de problemas sencillos. Este uso práctico de la matemática posibilitó importantes avances en el álgebra, aunque muy pocos en la geometría.

Textos matemáticos en la antigua China.

El trabajo matemático más antiguo es *Jiu Zhang Suanshu* (九章算術) o *Los nueve capítulos sobre arte matemático*, compuesto por varios autores desde el siglo X al II a.e.c. Su aproximación a las matemáticas consiste en la búsqueda de métodos generales para la resolución de problemas, en contraste con el enfoque más común en la antigua Grecia, que tendía a deducir proposiciones a partir de un conjunto inicial de axiomas.

Las entradas en *Jiu Zhang* toman la forma en general de presentación del problema, seguido de su solución y una explicación del procedimiento que lleva a la solución.

Debido a la tradición china de comentar los trabajos clásicos, es difícil determinar la época a la que pertenecen ciertas partes del texto. Hay gran consenso en que el texto original fue escrito por varios autores que vivieron en diferentes épocas, así que *Jiu Zhang* puede considerarse como el esfuerzo colectivo de matemáticos durante varios siglos. Ahora bien, la versión comentada más antigua fue escrita aproximadamente en el siglo primero e.c. y los comentario más notables, realizados por el gran matemático Liu Hui, datan del siglo tercero e.c. Otros dos comentaristas de gran valor fueron Zu Chongzhi y Zu Geng, padre e hijo respectivamente.

Aunque *Jiu Zhang* es el texto sobre matemáticas más antiguo, el texto con contenido matemático más antiguo conocido es *Zhou Bi Suan Jing* (周髀算經). Este es un texto sobre astronomía que se podría traducir como *La aritmética clásica del gnomon y las trayectorias circulares del cielo*, aunque *Zhou* (trayectorias circulares del cielo) podría igualmente referirse a dicha dinastía.

Zhou Bi consiste en dos libros, el primero de los cuales muestra cuan fácilmente los astrónomos chinos manejaban las fracciones así como su conocimiento del Teorema de Pitágoras; el segundo libro es un tratado sobre teorías de los calendarios. La mayoría del texto desarrolla cálculos sobre las dimensiones del cosmos usando la sombra proyectada por un simple gnomon.

Su autoría y su época siguen siendo fuente de discusión entre los investigadores. Probablemente la colección de textos que lo forman fue ensamblada durante la dinastía Han, siglo primero e.c., aunque se asume que fue escrito durante la dinastía Zhou, mil años antes.

Al igual que *Jiu Zhang*, las versiones que disponemos de *Zhou Bi* aparecen acompañadas por sus comentaristas: Zhao Shuang (siglo III e.c.), Zhen Luan (siglo VI e.c.) y Li Chunfeng (siglo VII e.c.).

A diferencia de los griegos, los matemáticos chinos no mostraron una gran inquietud por la geometría. Sin embargo, el *Canón Mohista* (*Mo Jing*) nos revela que había al menos un grupo de filósofos chinos interesado en la geometría desde un perspectiva teórica. El libro, en su mayoría perdido, describe aspectos de muchas áreas de conocimiento asociadas con la ciencia física. Así, nos encontramos con una definición *atomista* del punto y varias definiciones del círculo. El texto data aproximadamente del 330 a.e.c y fue compilado por los seguidores de Mozi (o Mo Tzu, 470-391 a.e.c.).

FIGURAS CIRCULARES

La concepción china del círculo

En China nunca hubo un desarrolló de la geometría teórica basada en axiomas, postulados y teoremas, tal y como tuvo lugar en la antigua Grecia. La genialidad de los matemáticos chinos se manifestó en el cálculo y el álgebra, facilitada por su sistema de numeración en base diez, su perfecto manejo de las fracciones y un sistema de cálculo con varillas que desde nuestra perspectiva actual era esencialmente un dispositivo de computación.

Ahora bien, en el *Canón Mohista* nos encontramos con una definición *atomista* del punto y varias definiciones del círculo. Veamos, por curiosidad, estas definiciones que permiten acercarnos a su conceptualización en la antigua China. El texto está escrito en forma de pares de sentencias, la primera nos daría una conceptualización canónica y la segunda una interpretación o exposición. Para las traducciones me he basado en Needham y Ling (2005) y Brandenburg y Nevenzeel (2007).

Definición del punto:

Canon: La definición de punto (*tuan*) es la siguiente: la línea es separada en partes, y esa parte que no tiene parte restante y forma el extremo final (de la línea) es un punto.

Exposición: Un punto puede estar al final (de la línea) o en su principio como la aparición de la cabeza en un parto. (Por su indivisibilidad) no hay nada similar a él.

Canon: Eso que no es (posible separar en) mitades no puede ser cortado más veces y no puede ser separado. Se alcanza en el punto.

Exposición: Si cortas una longitud continuamente en mitades, sigues adelante hasta llegar a la situación que el medio (del un fragmento) no es suficientemente grande para ser separado más veces en mitades; y entonces tienes el punto. Separas la parte delantera (de una línea) y separas la parte trasera, seguirá (eventualmente quedando) un punto (indivisible) en el medio. O si sigues cortando en mitades, llegarás a una situación en la cual hay un *casi-nada*, y como *nada* no puede ser dividido por la mitad, no puede ser cortado más.

Definición del círculo:

Canon: Un círculo[2] puede descansar en cualquier punto de su circunferencia.

Exposición: [La exposición está perdida]

Canon: Un círculo[3] es una figura tal que todas las líneas dibujadas a través del centro (y alcanzando la circunferencia) tiene la misma longitud.

Exposición: Un circulo es esa línea descrita por el compás de un carpintero que termina en el mismo punto en el cual empezó.

Canon: (Como para el círculo, hay un) centro (desde el que la distancia a cualquier punto en la circunferencia es) de la misma longitud.

Exposición: El centro es (como un) corazón, desde el cual (un punto moviéndose a cualquier parte de la circunferencia) viaja en todos los casos la misma distancia.

Observamos como en las definiciones juegan un papel primordial los conceptos de centro y diámetro (segundo canon) y centro y radio (tercer canon). El círculo es denominado *yuan* o *yuan thien*, la circunferencia *chou* y el diámetro *ching*. No hay una palabra especial para el radio, al que denominaban *pan ching*, literalmente mitad del diámetro. Veremos que en los problemas relacionados con el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes el radio nunca es un dato o se pide como variable. El segmento de un círculo es denominado *hu thien* o *kung thien*, *hu* es la circunferencia del segmento o arco, *hsüan* es la cuerda, *shih* es la flecha. El espacio anular entre dos círculos se denomina *huan thien* (Needham y Ling, 2005).

En su definición canónica, el círculo es una figura geométrica que verifica una determinada propiedad (las líneas que lo cruzan por su centro tiene la misma longitud), pero en su explicación es el resultado de un proceso generador (por medio del compás de un carpintero). En la tercera definición, identifican el centro y la circunferencia a partir del círculo. Dado éste, el centro es el punto que equidista del exterior, que es la circunferencia.

[2] *huan*, anillo
[3] *yuan*.

π en la antigua China

El círculo, el cono o la esfera son figuras familiares para el matemático en la antigua China y aparecen en multitud de problemas en los textos *Zhou Bi* y *Jiu Zhang*.

En *Zhou Bi*, por tratarse de un libro de astronomía, las referencias al círculo se centran exclusivamente al cálculo de una órbita (circunferencia) a partir del diámetro. Nunca se solicita el cálculo del área, ni se trabaja con secciones circulares o figuras tridimensionales. Además, se asume que el lector conoce el procedimiento para pasar del diámetro a la circunferencia por lo que la solución se ofrece sin más explicaciones. Sólo cuando los cálculos revisten cierta complejidad aparece una descripción del procedimiento a seguir. En todos los casos la circunferencia l es tres veces el diámetro d. Con la notación actual, $l = 3d$.

Por tanto, en la antigua China el valor asociado a π era 3. Por ejemplo, en el problema #B16 se indica que el diámetro total es 238.000 *li*, y la circunferencia es 714.000 *li*.[4] En el Apéndice, en la sección dedicada a los problemas en *Zhou Bi*, el lector encontrará la colección completa de problemas que relacionan el diámetro y la longitud de una circunferencia.

Cuadro 1: Listado completo de problemas en *Jiu Zhang* relacionados con figuras circulares.

Problema	**Figura**	**Datos**	**Variable**
1.31	Círculo	Circunferencia y diámetro	Área
1.32	Círculo	Circunferencia y diámetro	Área
1.33	Casco esférico	Circunferencia y "diámetro"	Área
1.34	Casco esférico	Circunferencia y "diámetro"	Área
1.35	Segmento circular	Cuerda y flecha	Área
1.36	Segmento circular	Cuerda y flecha	Área
1.37	Anillo circular	Circunferencia interior y exterior, y anchura	Área
1.38	Anillo circular	Circunferencia interior y exterior, y anchura	Área
4.17	Círculo	Área	Circunferencia
4.18	Círculo	Área	Circunferencia
4.23	Esfera	Volumen	Diámetro
4.24	Esfera	Volumen	Diámetro
5.9	Cilindro	Circunferencia y altura	Volumen
5.11	Cono truncado	Circunferencia inferior y superior y altura	Volumen
5.13	Cono	Circunferencia y altura	Volumen
5.20	Duela circular	Circunferencias inferiores y superiores y altura	Volumen
5.23	Cono	Circunferencia y altura	Volumen
5.24	Cono	Circunferencia y altura	Volumen
5.25	Cono	Circunferencia y altura	Volumen
5.28	Cilindro	Volumen y altura	Circunferencia

[4] Aunque su valor ha variado en el tiempo e incluso difería entre regiones, en la antigua China un *li* era algo más de 400 metros.

En *Jiu Zhang*, por tratarse propiamente de un tratado de matemáticas, encontramos múltiples problemas donde la figura circular es protagonista. En el primer capítulo se pide calcular el área de diferentes figuras planas, entre ellas el área de un circulo, la de un segmento circular y la de un anillo. En el capitulo cuarto hay múltiples problemas que requieren el cálculo de raíces cuadradas y cubicas, entre ellos el cálculo de la circunferencia de un círculo a partir de su área y el cálculo del diámetro de una esfera a partir de su volumen. El capítulo quinto se centra en el cálculo de volúmenes, entre ellos el del cono, el cono truncado, el cilindro y una figura que podríamos describir como una duela curvada (véase Figura 5). En el último problema del quinto capitulo se solicita el cálculo de la circunferencia de un cilindro conocido su volumen y altura. Véase el Cuadro 1 para más detalles sobre los problemas en *Jiu Zhang* referidos a figuras circulares.

En todos los casos, no sólo se ofrece la solución sino el procedimiento que se ha de seguir para llegar a esta, y siempre el valor implícito para π es 3. Veamos a continuación estos procedimientos en detalle.

Cálculo de áreas y longitudes circulares en *Jiu Zhang*

De los ocho problemas de cálculo de áreas, todos ellos en el primer capítulo, solo los dos primeros hacen referencia al área de un círculo y son de interés en relación al valor asignado a π. El resto de problemas preguntan por el cálculo del área de un casco esférico, de un segmento circular y de un anillo circular. Además, en el capítulo cuarto aparecen dos problemas que piden el cálculo de la circunferencia a partir de su área pero que no aportan ningún conocimiento nuevo.

En los **problemas 1.31 y 1.32** la figura es un círculo del que se conoce su diámetro d y su circunferencia l y se pide calcular el área A. Los autores dan hasta cuatro formas diferentes de cálculo, algo posible gracias a la redundancia en los datos. Con la notación actual, las fórmulas son:

$$A = \frac{l}{2}\frac{d}{2} \tag{1}$$

$$A = \frac{ld}{4} \tag{2}$$

$$A = \frac{3}{4}d^2 \tag{3}$$

$$A = \frac{1}{12}l^2 \tag{4}$$

En el cuarto capítulo aparecen dos problemas (4.17 y 4.18) donde se pide obtener la longitud de la circunferencia dado el área del círculo. En ambos casos se aplica la inversa de la fórmula (4), $l = \sqrt{12A}$.

Las fórmulas (1) y (2) son equivalentes y exactas dado que el área de un círculo se pude obtener a partir de su diámetro y longitud. Según las fórmulas (1) y (2) $A = \frac{l}{2}\frac{d}{2} = \frac{\pi d}{2}\frac{d}{2} = \frac{\pi}{4}d^2$, que equivale a la conocida fórmula $A = \pi r^2$, siendo r el radio. Las dos últimas fórmulas son incorrectas por cuanto asumen en sus coeficientes un valor de $\pi = 3$. Para la tercera fórmula la expresión exacta sería la deducida previamente $A = \frac{\pi}{4}d^2$, y para la cuarta fórmula la expresión exacta sería $A = \frac{1}{4\pi}l^2$.

Se podría pensar que si se conoce el valor exacto del diámetro y de la circunferencia, con cualquiera de las dos primeras fórmulas se obtendría el valor exacto del área, mientras que con las dos últimas fórmulas obtendríamos otros dos valores diferentes entre si y al anterior. Esto no es así, y en los problemas 1.31 y 1.32 las cuatro fórmulas dan la misma área porque el valor asignado a la circunferencia no es exacto, sino tres veces el valor del diámetro ($\pi = 3$). Así, todas las respuestas son iguales, e incorrectas.

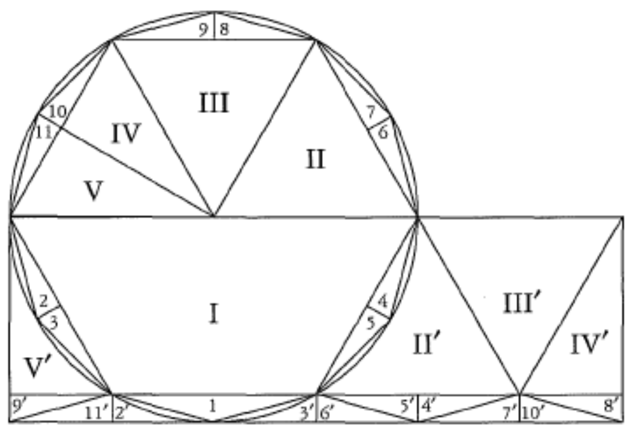

Figura 2: El área del dodecágono, formado por las piezas I a V y 1 a 11, es aproximadamente igual al área círculo; y el perímetro del hexágono I a V es aproximadamente igual a la longitud del círculo. Las piezas que forman el dodecágono, convenientemente ensambladas, forman un rectángulo. Por tanto, podemos considerar iguales las áreas del rectángulo y del círculo. El rectángulo tiene una altura igual al radio del círculo y una longitud igual a la mitad del perímetro del hexágono. Así, el área del círculo, que es *igual* al área del dodecágono, que es igual al área del rectángulo, sería el radio del círculo por la mitad de su longitud, obteniéndose la fórmulas (1) y (2).

Cómo llegaron los matemáticos de la antigua China a las expresiones (1) y (2) es algo que nunca sabremos con seguridad. Una posibilidad consiste en considerar el perímetro del hexágono regular inscrito dentro del circulo como una buena aproximación del perímetro de la circunferencia, y área del dodecágono regular inscrito dentro de la circunferencia como una buena aproximación del área del círculo. Ahora podemos descomponer el dodecágono en porciones que convenientemente ensambladas forman un rectángulo, cuyos lados miden el semi-diámetro del círculo y el semi-perímetro del hexágono. Como hemos asumido que el perímetro del hexágono se aproxima a la longitud de la circunferencia, entonces el área del rectángulo, que coincide con la del dodecágono y, por tanto, se aproxima a la del círculo, viene dada por las fórmulas (1) y (2). (Véase Figura 2).

Las fórmulas (3) y (4) se obtienen directamente de las anteriores aplicando la relación 1:3 entre el diámetro del circulo y la longitud de la circunferencia. También, se puede llegar a ellas a partir de descomposiciones alternativas de un dodecágono. (Véase Figura 3).

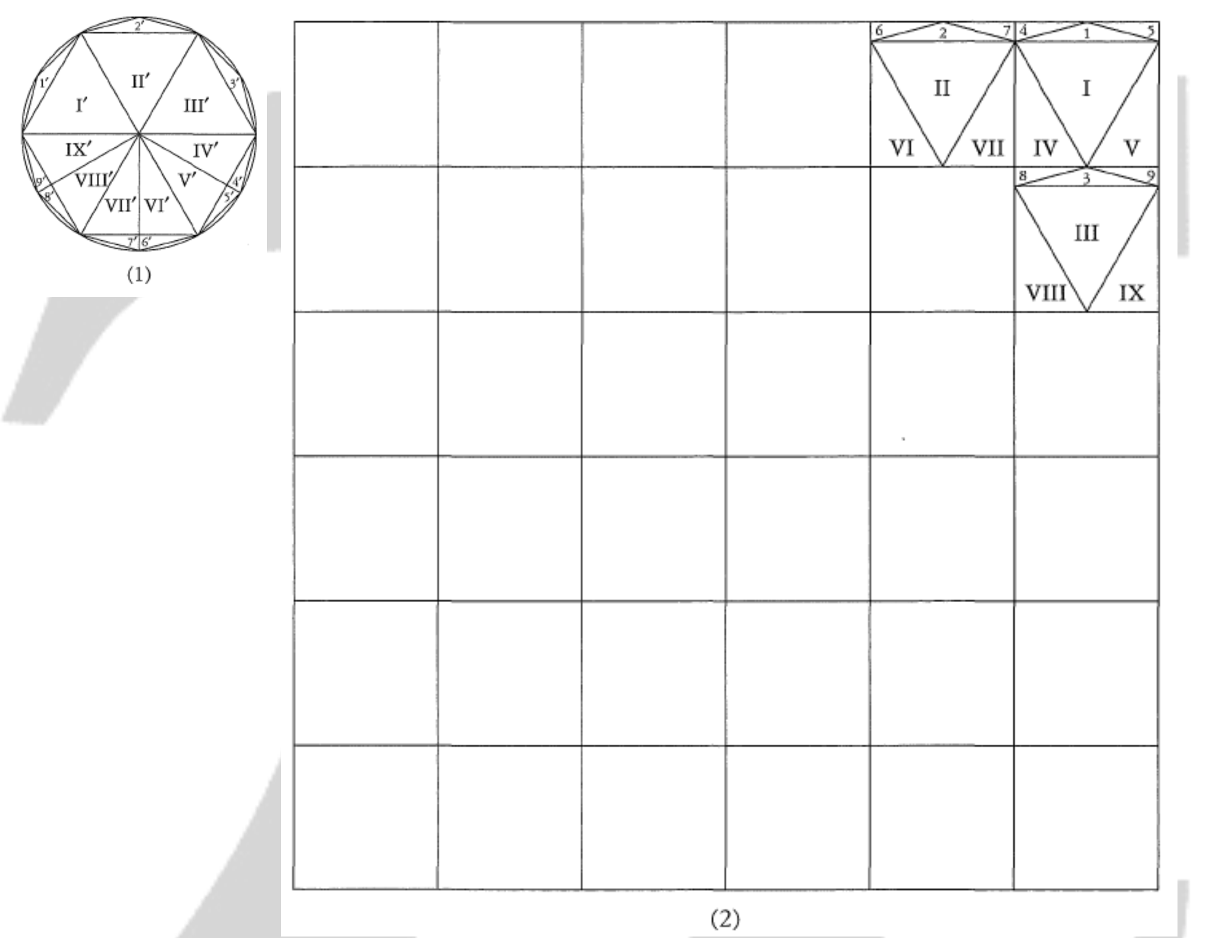

Figura 3: Podemos asumir que el área del círculo es igual al área del dodecágono formado por las piezas I′ a IX′ y 1′ a 9′ y que su circunferencia es igual al perímetro del hexágono I′ a IX′ (imagen 1). Las piezas del dodecágono, convenientemente ensambladas forman tres cuadrados de lado el semi-diámetro (imagen 2). Por tanto, el área del círculo es $3 \cdot (d/2)^2$ y obtenemos la fórmula (3). Además, estas piezas ocupan 3 partes de 36 de un cuadrado de lado el perímetro del hexágono o circunferencia (imagen 2). Es decir, el área del círculo es 3/36 de l^2 y tenemos la fórmula (4).

Liu Hui (siglo III e.c.), uno de los comentaristas de *Jiu Zhang*, demostró de forma rigurosa las fórmulas (1) y (2), calculando el área del polígono inscrito con $6 \cdot 2^n$ lados y llevando el proceso al limite cuando n crece. Así que es posible que los matemáticos anteriores llegaran a estas fórmulas aplicando un razonamiento similar donde el rigor fue sustituido por la intuición. El razonamiento podría parecerse al siguiente: el área del polígono regular de n lados inscrito dentro de un círculo es la suma de las áreas de los n triángulos isósceles que lo forman, siendo el área de cada uno de estos triángulos la mitad del producto del lado del polígono por la altura del triángulo. Por tanto, el área del polígono es la mitad del producto de su perímetro por la altura de los triángulos. Si aumentamos el número de lados del polígono, su perímetro se aproxima a la longitud de la circunferencia y la altura de cada triángulo al semi-diámetro del círculo, llegando en el límite a las fórmulas (1) y (2).

Los **problemas 1.33 y 1.34** describen el procedimiento para el cálculo del área de un casco esférico, conocida la longitud del círculo base l y su "diámetro" d', medido sobre la superficie de la figura. La fórmula aplicada en los problemas, en notación actual sería,

$$A_{Casco-esférico} = \frac{1}{4} l d' \quad (5)$$

Para que esta fórmula sea correcta es necesario que el casco esférico sea mayor que una semiesfera, o que la figura considerada sea algún tipo de semi-esfera deformada. Por otro lado, la fórmula (5) es similar a la fórmula (2) propuesta para el cálculo del área de un círculo, y este puede haber sido su origen.

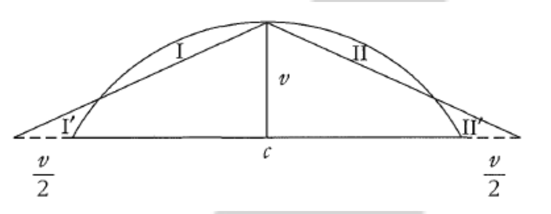

Figura 4: Si suponemos que las zonas I, II, I' e II' tiene la misma área, entonces es inmediato comprobar que el área del segmento circular es $A_{Segmento} = (c + v)v/2$.

En los **problemas 1.35 y 1.36** se describe el procedimiento para el cálculo del área de un segmento circular conocida la cuerda c y la flecha v, que se basa en su aproximación al área de un triángulo (véase Figura 4). La fórmula no es correcta excepto para el caso en que el segmento circular es un semi-círculo. De cualquier forma, el procedimiento no nos indica nada en relación al valor de π .

El procedimiento descrito en los **problemas 1.37 y 1.38** para el cálculo del área de un anillo circular, trasladado a nuestra actual notación es,

$$A_{Anillo} = \frac{1}{2}(l_1 + l_2)e, \quad (6)$$

donde l_1 es la longitud del círculo interior, l_2 la del círculo exterior y e es la anchura del anillo (la diferencia entre los radios de los círculos). De nuevo, esta fórmula es exacta por *incorporar* el valor de π en las longitudes de las circunferencias.[5] Llegar intuitivamente a la fórmula (6) no es difícil: si cortamos el anillo circular y enderezamos la cinta se obtiene un rectángulo cuya anchura e será la del anillo y con una longitud mayor que la longitud del círculo interior y menor que la del círculo exterior. Si aproximamos esta cantidad por la media de las longitudes de los dos círculos tenemos la fórmula buscada.

El uso de la fórmula (1) para el cálculo del área de un círculo, y en la misma medida el uso de las fórmulas (4) y (6), implica que los matemáticos chinos ya consideraban que dado un círculo, la constante que relaciona su diámetro con su circunferencia es la misma constante que relaciona el cuadrado de su diámetro con su área. Esto unido a su carácter eminentemente calculista y algebraico generó la necesidad de disponer de una mejor aproximación de π que 3. Así, en los primeros siglos e.c. empezaron a usarse valores más aproximados como $92/29$ o $\sqrt{10}$ por Zhang Heng (78-139), $142/45$ por Wan Fan (219-257), y $157/50$ por Liu Hui (siglo tercero) que más tarde mejoró con la aproximación 3.1416 a partir del cálculo del perímetro de un polígono de $6 \cdot 2^9$ lados.

Los **problemas 4.17 y 4.18** piden el cálculo de la longitud de una circunferencia a partir su área. Para ello aplican la inversa de la fórmula (4), siendo una fórmula exacta que no aporta ningún conocimiento sobre π:

$$l = \sqrt{12A} \tag{7}$$

Cálculo de volúmenes de figuras circulares en *Jiu Zhang*

Los capítulos cuarto y quinto de *Jiu Zhang* contienen un conjunto de problemas relacionados con el cálculo de volúmenes para una gran variedad de figuras, entre ellas el cilindro, el cono, el cono truncado y una duela circular (una figura similar a una presa). En otros casos el volumen es un parámetro a partir del cual obtener el diámetro (de una esfera) o la circunferencia (de un cilindro). De nuevo, y con la notación actual, las fórmulas usadas son:

$$V_{Cilindro} = \frac{1}{12} l^2 h \tag{8}$$

---

[5] La fórmula $A_{anillo} = \frac{1}{2}(l_1 + l_2)e$ se puede re-escribir como,

$$A_{anillo} = \frac{1}{2}(l_1 + l_2)(r_2 - r_1) = \frac{1}{4}(l_1 + l_2)(d_2 - d_1) = \frac{1}{4} l_2 d_2 - \frac{1}{4} l_1 d_1 + \frac{1}{4}(l_1 d_2 - l_2 d_1) = \frac{1}{4} l_2 d_2 - \frac{1}{4} l_1 d_1,$$

donde el último sumando del penúltimo término se cancela debido a la relación de proporcionalidad entre el diámetro y la longitud de una circunferencia, $\frac{l_1}{d_1} = \frac{l_2}{d_2}$. La última expresión es la diferencia entre las áreas del círculo exterior e interior, que es como calcularíamos hoy en día el área del anillo circular.

$$V_{Cono} = \frac{1}{36} l^2 h \qquad (9)$$

$$V_{Cono-truncado} = \frac{1}{36}(l_1 l_2 + l_1^2 + l_2^2)h \qquad (10)$$

$$V_{Esfera} = \frac{9}{16} d^3 \qquad (11)$$

donde h corresponde a la altura de la figura; l es para el cilindro y el cono la longitud de su base circular; l_1 y l_2 son las longitudes del círculo inferior y superior del cono truncado; y d es el diámetro de la esfera.

No siempre el cálculo solicitado corresponde a un volumen. Así, las fórmulas (8), (9) y (10) sí son empleadas para obtener el volumen de un cilindro (**problema 5.9**), un cono (**problemas 5.13, 5.23, 5.24 y 5.25**) y un cono truncado (**problema 5.11**). Sin embargo, en *Jiu Zhang* se aplican las inversas de las fórmulas (8) y (11): la inversa de la fórmula (8) para obtener la longitud de la base de un cilindro dado su volumen y su altura (**problema 5.28**); y la inversa de la fórmula (11) para obtener el diámetro de una esfera dado su volumen (**problemas 4.23 y 4.24**).

Las fórmulas para el cilindro, el cono y el cono truncado, (8) a (10), son exactas por obtener el volumen de la figura a partir de la longitud de la circunferencia base y no del diámetro. La fórmula (11) para el cálculo del volumen de una esfera es incorrecta en su fundamento, más allá del valor que se asuma para π. Por tanto, las fórmulas para el cálculo de volúmenes no aportan información novedosa en relación a π.

Veamos como pudieron los antiguos chinos obtener estas expresiones para el cálculo de volúmenes. Las fórmulas del cilindro, el cono y el cono truncado las derivaron por mera comparación con las fórmulas del prisma, la pirámide y la pirámide truncada de bases cuadradas. Los antiguos chinos conocían la fórmula exacta para el cálculo del volumen de multitud de poliedros. Por ejemplo, sabían que el volumen de un prisma de base cuadrada es $V = a^2 h$, donde a representa el lado del cuadrado base. Así, consideraron que para el cálculo del área de un cilindro sólo tenían que sustituir las áreas de la bases. De esta forma a^2 pasaba a ser $\frac{1}{12} l^2$, usando la fórmula (4), y el volumen del cilindro se calculaba como $V_{Cilindro} = \frac{1}{12} l^2 h$. Como el volumen de la pirámide de base cuadrada es un tercio del volumen del prisma con igual base y altura, dedujeron que el volumen del cono debía ser un tercio del volumen del cilindro equivalente, es decir, $V_{Cono} = \frac{1}{36} l^2 h$. Por último, para el cálculo del volumen de una pirámide truncada de base cuadrada, con lado superior a_1 e inferior a_2 usaban la fórmula $V = \frac{1}{3}(a_1 a_2 + a_1^2 + a_2^2)h$. Si aplicamos una sustitución para las áreas de las bases equivalente a la aplicada en el cilindro, llegamos a la fórmula (10).

La fórmula para el cálculo de la esfera es incorrecta. La fórmula correcta, suponiendo un valor de $\pi = 3$, hubiera sido $V_{Esfera} = \frac{1}{2}d^3$. Aunque se ha escrito mucho sobre el posible origen de la fórmula (11), me limitaré sólo a recoger tres de las posibilidades que se pueden encontrar en la literatura especializada (Martzloff, 2006).

Un comentarista anónimo de *Jiu Zhang* indica que es el resultado de un cálculo experimental, un cubo de cobre pesa 16 unidades, mientras que una esfera de cobre (de diámetro igual al lado del cubo) pesa 9 unidades. Así, 16 a 9 sería la relación entre sus volúmenes.

Como no, siempre hay algún historiador que busca la justificación en el uso de otra aproximación de π. Comparando la formula (11) con la fórmula exacta $V_{Esfera} = \frac{\pi}{6}d^3$ se deduce que $\pi = \frac{27}{8} = 3{,}375$. Sin embargo, esta explicación parece inverosímil porque la regla general en *Jiu Zhang* es usar $\pi = 3$ y además este valor es una aproximación al verdadero valor de π mejor que $27/8$.

Liu Hui, sabiendo que la fórmula es incorrecta, nos da en sus comentarios una explicación bastante verosímil y muy elegante de cómo se pudo haber llegado a ella. La relación entre el área de un cuadrado y la del círculo inscrito es de 1 a $3/4$, así que la relación entre el volumen del cubo y el del cilindro inscrito es la misma, $V_{Cilindro} = \frac{3}{4}V_{Cubo}$. Si ahora suponemos *erróneamente* que la relación entre el volumen del cilindro y la de la esfera inscrita en él es la misma $V_{Esfera} = \frac{3}{4}V_{Cilindro}$, llegamos a que $V_{Esfera} = \frac{9}{16}V_{Cubo}$.

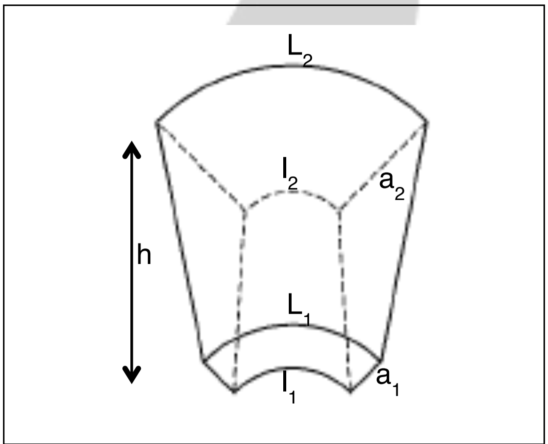

Figura 5: Duela circular

En el **problema 5.20** de de *Jiu Zhang* aparece el cálculo del volumen de una duela circular, una especie de presa de embalse en forma de anillo deficiente. Esta figura es ancha y larga en la parte alta, y estrecha y corta en la parte baja (véase Figura 5). Los datos que se aportan son, tanto para la parte superior como para la inferior del embalse, la longitud del arco de circunferencia exterior e interior y la anchura. Además, se da la altura de la duela. La fórmula para el cálculo de volumen es exacta y corresponde a:

$$V_{Duela} = \frac{1}{6}\left\{\left[(L_2 + l_2) + \frac{1}{2}(L_1 + l_1)\right] a_2 + \left[(L_1 + l_1) + \frac{1}{2}(L_2 + l_2)\right] a_1\right\} h \quad (12)$$

APÉNDICE

Zhou Bi Suan Jing

Aunque la figura del círculo es mencionada con frecuencia en *Zhou Bi* (véase sección #D [6]), el texto hace sólo referencia a los conceptos geométricos más elementales relacionados con esta figura. Excepto un círculo graduado que aparece en la sección #G y un texto fragmentado en #C, todos los círculos discutidos son orbitas (*heng*) de las que se conoce su diámetro o su circunferencia. Cuando hay que relacionar estos dos conceptos, lo que ocurre por primera vez en el problema #B16, se asume la relación 1:3, es decir el valor implícito de π es 3. Por la naturaleza de *Zhou Bi* no hay ningún problema relacionado con el cálculo de áreas circulares.

Veamos a continuación algunos de los cálculos relacionados con el círculo. En todos ellos se obtiene la circunferencia multiplicando por 3 su diámetro (traducción a partir de Cullen, 2006):

> #B16 […] El diámetro total es 238.000 *li*, y este es el diámetro de la órbita solar en el solsticio de verano. Su circunferencia es 714.000 *li*.
>
> #B18 […] El diámetro total es 476.000 *li*, y este es el diámetro de la órbita solar en el solsticio de invierno. Su circunferencia es 1.428.000 *li*.
>
> #B19 […] El diámetro total es 357.000 *li*, (y este es el diámetro de la órbita solar en los equinoccios). Su circunferencia es 1.071.000 *li*.
>
> #B21 […] en ambos casos el diámetros es 357.000 *li* y la circunferencia es 1.071.000 *li*.
>
> #B32 […] el diámetro de los cuatro polos es 810.000 *li*, y la circunferencia es 2.430.000 *li*.
>
> #B34 […] El diámetro de la órbita solar en el solsticio de invierno es 476.000 *li*, y su circunferencia es 1.428.000 *li*.
>
> #D7 Por tanto, el intervalo entre las órbitas es 19.833 *li* y 1/3 *li*, que son 100 *bu*.[7] Para encontrar los diámetros de las sucesivas órbitas, duplicar esta cantidad y añadirla al diámetro de la órbita mas interior (para obtener el diámetro de la segunda órbita). Añade dos veces el total al diámetro de la órbita mas interior para obtener el diámetro de la tercera órbita, y así para las sucesivas órbitas.
>
> #D8 La órbita primera y más interior: diámetro 238.000 *li*. Circunferencia 714.000 *li*.
>
> #D9 La próxima es la segunda órbita: diámetro 277.666 *li* 200 *bu*. Circunferencia 833.000 *li*.

---

[6] A lo largo de la exposición de *Zhou Bi* haremos uso de la división del texto realizada por Cullen (Cullen, 1996).

[7] Algunas relaciones entre unidades útiles son: unidades de longitud, 1 *li* = 300 *bu, 1 zhang = 10 chi = 100 cun = 1.000 fen = 10.000 li*; unidades de superficie y volumen, 1 *mu* = 240 *bu*.

#D10 La próxima es la tercera órbita: diámetro 317.333 *li* 100 *bu*. Circunferencia 952.000 *li*.

#D11 La próxima es la cuarta órbita: diámetro 357.000 *li*. Circunferencia 1.071.000 *li*.

#D12 La próxima es la quinta órbita: diámetro 396.666 *li* 200 *bu*. Circunferencia 1.190.000 *li*.

#D13 La próxima es la sesta órbita: diámetro 436.333 *li* 100 *bu*. Circunferencia 1.309.000 *li*.

#D14 La próxima es la séptima órbita: diámetro 476.000 *li*. Circunferencia 1.428.000 *li*.

#D15 La próxima es el límite de la iluminación solar en el solsticio de invierno. Esto da 167.000 *li* más allá de la órbita más exterior. Esto da un diámetro de 810.000 *li*. Circunferencia 2.430.000 *li*.

#D16 Nadie sabe que hay más allá.

#D19 El diámetro de los cuatro polos es 810.000 *li*. Circunferencia 2.430.000 *li*.

#E3 Por tanto, el diámetro de la extensión hacia el exterior de rayos del sol es 810.000 *li*, y su circunferencia es 2.430.000 *li*.

#F6 El diámetro del círculo es 23.000 *li* y su circunferencia es 69.000 *li*.

Jiu Zhang Suanshu

Veamos a continuación los problemas en *Jiu Zhang* relacionados con figuras circulares y recogidos en el Cuadro 1. Para su traducción se ha empleado principalmente el texto de Chemla y Shuchun (2004) apoyado por Kangshen *et alia.* (1999) y Yong (1994).

Capítulo 1

Problema 1.31: supón que hay un círculo de circunferencia 30 bu y diámetro 10 bu. Encuentra el área.

Respuesta: 75 bu.

Problema 1.32: Supón ahora que hay un círculo de circunferencia 181 bu y diámetro 60 1/3 bu. Encuentra el área.

Respuesta: 11 mu y 90 1/12 bu.

El método dice: multiplica entre si la mitad de la circunferencia y la mitad del diámetro para obtener el área en bu.

Otro método: multiplica entre si la circunferencia y el diámetro y divide por 4.

Otro método: multiplica el diámetro por si mismo, entonces por 3 y divide por 4.

Otro método: multiplica la circunferencia por si misma y divide por 12.

Estos cuatro métodos corresponden a las fórmulas (1) a (4) y todos ellos dan el mismo resultado. Los cuatro métodos coinciden porque en ambos problemas el dato de la longitud es tres veces el dato del diámetro. Veamos el segundo problema (recuerda que 1 *mu* = 240 *bu*; nota a pie de página 7):

$A = \frac{181}{2}\frac{60\frac{1}{3}}{2} = 2730\frac{1}{12}\ bu$ fórmula (1),

$A = \frac{181 \cdot 60\frac{1}{3}}{4} = 2730\frac{1}{12}\ bu$ fórmula (2),

$A = \frac{3}{4}\left(60\frac{1}{3}\right)^2 = 2730\frac{1}{12}\ bu$ fórmula (3),

$A = \frac{1}{12}(181)^2 = 2730\frac{1}{12}\ bu$ fórmula (4).

Como 1 *mu* = 240 *bu* (véase nota a pie de página 7), se tiene que $2730\frac{1}{12}\ bu = 11\ mu\ 90\frac{1}{12}\ bu$.

Problema 1.33: Supón que hay una superficie en forma de casco esférico, donde la circunferencia inferior vale 30 bu, y el diámetro "transversal" 16 bu. Calcula el área de la superficie.

Respuesta: 120 bu.

Problema 1.34: Supón ahora que hay una superficie en forma de casco esférico, donde la circunferencia inferior vale 99 bu, y el diámetro "transversal" 51 bu. Calcula el área de la superficie.

Respuesta: 5 mu 62 1/4 bu.

El método dice: multiplica la circunferencia por el diámetro y divide por 4.

Estos dos problemas se resuelven aplicando la fórmula (5):

$A = \frac{30 \cdot 16}{4} = 120\ bu$ fórmula (5) aplicada a 1.33,

$A = \frac{99 \cdot 51}{4} = 1262\frac{1}{4}\ bu = 5\ mu\ 62\frac{1}{4}\ bu$ fórmula (5) aplicada a 1.34.

Problema 1.35: Supón que hay una superficie en forma de segmento circular, donde la cuerda vale 30 bu, y la flecha 15 bu. Calcula el área de la superficie.

Respuesta: 1 mu 97 ½ bu.

Problema 1.36: Supón ahora que hay una superficie en forma de segmento circular, donde la cuerda vale 78 ½ bu, y la flecha 13 7/9 bu. Calcula el área de la superficie.

Respuesta: 2 mu 155 56/81 bu.

El método dice: multiplica la flecha por la cuerda. La flecha es además multiplicada por ella misma. Suma los resultados y divide por 2.

Estos dos problemas se resuelven aplicando la fórmula en la Figura 4:

$A = \frac{30 \cdot 15 + 15 \cdot 15}{2} = 337\frac{1}{2}\ bu = 1\ mu\ 97\frac{1}{2}\ bu$ fórmula Figura 4 aplicada a 1.35,

$A = \frac{78\frac{1}{2} \cdot 13\frac{7}{9} + 13\frac{7}{9} \cdot 13\frac{7}{9}}{2} = 635\frac{56}{81}\ bu = 2\ mu\ 155\frac{56}{81}\ bu$ fórmula Figura 4 aplicada a 1.36.

Problema 1.37: Supón que hay una superficie en forma de anillo, donde la circunferencia interior vale 92 bu, la circunferencia exterior 122 bu, y el diámetro transversal 5 bu. Calcula el área de la superficie.

Respuesta: 2 mu 55 bu.

Problema 1.38: Supón ahora que hay una superficie en forma de anillo, donde la circunferencia interior vale 62 ¾ bu, la circunferencia exterior 113 ½ bu, y el diámetro transversal 12 2/3 bu. Calcula el área de la superficie.

Respuesta: 4 mu 156 ¼ bu.

El método dice: suma las circunferencias interior y exterior, y toma la mitad de esto. Multiplica el resultado por el diámetro transversal, haciendo el producto en bu.

Estos dos problemas se resuelven aplicando la fórmula (6):

$A = \frac{92+122}{2} 5 = 535\ bu = 2\ mu\ 55\ bu$ fórmula (6) aplicada a 1.37,

$A = \frac{62\frac{3}{4} + 113\frac{1}{2}}{2} 12\frac{2}{3} = 1116\frac{1}{4}\ bu = 4\ mu\ 156\frac{1}{4}\ bu$ fórmula (6) aplicada a 1.38.

Capítulo 4

Problema 4.17: Supón que hay un área de 1518 ¾ bu. Encuentra la circunferencia del círculo.

Respuesta: 135 bu.

Problema 4.18: Supón ahora que hay un área de 300 bu. Encuentra la circunferencia del círculo.

Respuesta: 60 bu.

El método de kai yuan (abrir el círculo) dice: pon el área en bu y multiplica por 12. Encuentra la raíz cuadrada para obtener la circunferencia.

Estos dos problemas se resuelven aplicando la fórmula (7):

$l = \sqrt{12 \cdot 1518\frac{3}{4}} = \sqrt{18225} = 135\ bu$ fórmula (7) aplicada a 4.17,

$l = \sqrt{12 \cdot 300} = \sqrt{3600} = 160\ bu$ fórmula (7) aplicada a 4.18.

Problema 4.23: Supón que hay un volumen de 4.500 chi. Encuentra el diámetro de la esfera.

Respuesta: 20 chi.

Problema 4.24: Supón ahora que hay un volumen de 1.644.866.437.500 chi. Encuentra el diámetro de la esfera.

Respuesta: 14.300 chi.

El método de kai li yuan (abrir la esfera) dice: Pon el volumen en chi, multiplica por 16, y divide por 9. Extrae la raíz cúbica del resultado para obtener el diámetro de la esfera.

Estos dos problemas se resuelven aplicando la inversa de la fórmula (11):

$d = \sqrt[3]{\frac{16}{9}4500} = 20\ chi$ inversa fórmula (11) aplicada a 4.23,

$d = \sqrt[3]{\frac{16}{9}1.644.866.437.500} = 14.300\ chi$ inversa fórmula (11) aplicada a 4.24.

Capítulo 5

Problema 5.9: Supón que hay un cilindro de 4 zhang 8 chi de circunferencia, y 1 zhang 1 chi de altura. Encuentra el volumen.

Respuesta: 2.112 chi.

El método dice: La circunferencia de la base circular se multiplica por si misma, y este por la altura y se divide por 12.

Este problema se resuelve aplicando la fórmula (8):

$$V_{Cilindro} = \frac{1}{12}48^2 \cdot 11 = 2.112\, chi.$$

Problema 5.11: Supón que hay una pirámide truncada de base circular donde la circunferencia del círculo inferior vale 3 zhang, la circunferencia del círculo superior 2 zhang y la altura 1 zhang. Encuentra el volumen.

Respuesta: 527 7/9 chi

El método dice: Las circunferencias de los círculos superior y inferior se multiplican la una por la otra, y luego cada una se multiplica por si misma, se suman. Esto se multiplica por la altura y se divide por 36.

Este problema se resuelve pasando de *zhang* a *chi* y aplicando la fórmula (10):

$$V_{Cono-truncado} = \frac{1}{36}(30 \cdot 20 + 30 \cdot 30 + 20 \cdot 20)10 = \frac{19000}{36}\, chi = 527\frac{7}{9}\, chi.$$

Problema 5.13: Supón que hay un cono de base circular donde la circunferencia del círculo inferior vale 3 zhang 5 chi y la altura de 5 zhang y 1 chi. Encuentra el volumen.

Respuesta: 1735 5/12 chi.

El método dice: La circunferencia del círculo inferior se multiplica por ella misma, esto se multiplica por la altura y se divide por 36.

Este problema se resuelve pasando de *zhang* a *chi* y aplicando la fórmula (9):

$$V_{Cono} = \frac{1}{36}35^2 \cdot 51 = 1735\frac{5}{12}\, chi.$$

Problema 5.23: Supón que hay, en el suelo, un montón de mijo donde la circunferencia del círculo inferior es 12 zhang y la altura 2 zhang. Encuentra el volumen y la cantidad de mijo.

Respuesta: El volumen es 8000 chi. La cantidad, de mijo, 2962 26/27 hu.

Problema 5.24: Supón que hay, apoyado en un muro, un montón de soja donde la circunferencia del círculo inferior es de 3 zhang y la altura de 7 chi. Encuentra respectivamente el volumen y la cantidad de soja.

Respuesta: el volumen es 350 chi. La cantidad, de soja, 144 8/243 hu.

Problema 5.25: Supón que hay, apoyado en el ángulo interior de un muro, un montón de grano descascarillado donde la circunferencia del círculo inferior es de 8 chi y la altura de 5 chi. Encuentra respectivamente el volumen y la cantidad de grano descascarillado.

Respuesta: el volumen es 35 5/9 chi. La cantidad, de grano descascarillado, 21 691/729 hu.

El método para el montón de mijo dice: La circunferencia del círculo inferior se multiplica por ella misma, esto se multiplica por la altura y se divide por 36.

En el caso en que esta apoyado en un muro se divide por 18.

En el caso en que esta apoyado en el ángulo interior de un muro se divide por 9.

La regla de hu para el mijo es un volumen de 2 chi 7 cun.

En el caso de un hu de grano descascarillado es un volumen de 1 chi 6 1/5 cun.

En el caso de un hu de soja, fríjol, grano de cáñamo, trigo es 2 chi 4 3/10 cun.

Un montón de mijo (problema 5.23) tiene forma de cono así que este problema se resuelve aplicando la fórmula (9):

$$V_{Cono} = \frac{1}{36} 120^2 \cdot 20 = 8000\, chi.$$

Este volumen se transforma ahora en cantidad de mijo sabiendo que 1 *hu* son 2 *chi* 7 *cun* (o 2,7 *chi*), por tanto 8000 *chi* = 8000/2,7 *hu* = 2962 26/27 *hu*.

Un montón de soja apoyado en un muro (problema 5.24) tiene forma de semi-cono. Además, ahora el dato que se da de la circunferencia inferior, que denominaremos l', corresponde sólo a media circunferencia. Este problema se resuelve aplicando una variante de la fórmula (9):

$$V_{Semi-Cono} = \frac{1}{2}\frac{1}{36}l^2h = \frac{1}{2}\frac{1}{36}(2l')^2h = \frac{1}{18}l'^2h.$$

Con los datos del problema 5.24 se tiene que $V_{Semi-Cono} = \frac{1}{18}30^2 7 = 350\ chi$.

Este volumen se transforma ahora en cantidad de soja sabiendo que 1 *hu* son 2 *chi* 4 3/10 *cun* (o 2,43 *chi*), por tanto 3500 *chi* = 350/2,43 *hu* = 144 8/243 *hu*.

Un montón de grano apoyado en una esquina interior (problema 5.25) tiene forma de un cuarto de cono. De nuevo, el valor que se da de la circunferencia inferior, que denominaremos l'', corresponde sólo a un cuarto de circunferencia. Así que este problema se resuelve aplicando una nueva variante de la fórmula (9):

$$V_{Cuarto-Cono} = \frac{1}{4}\frac{1}{36}l^2h = \frac{1}{4}\frac{1}{36}(4l'')^2h = \frac{1}{9}l''^2h.$$

Con los datos del problema se tiene que $V_{Cuarto-Cono} = \frac{1}{9}8^2 5 = 35\frac{5}{9}\ chi$.

Este volumen se transforma ahora en cantidad de grano descascarillado sabiendo que 1 *hu* son 1 *chi* 6 1/5 *cun* (o 1,62 *chi*), por tanto 35+5/9 *chi* = (35+5/9)/1,62 *hu* = 21 691/729 *hu*.

Problema 5.20: Supón que hay una duela curvada que, a nivel superior, tiene una circunferencia interior de 2 zhang, una circunferencia exterior de 4 zhang y un largo de 1 zhang, y que, a nivel inferior, tiene una circunferencia interior de 1 zhang 4 chi, una circunferencia exterior de 2 zhang 4 chi, y un largo de 5 chi, y que tiene una profundidad de 1 zhang. Encuentre el volumen.

Respuesta 1883 chi 3 1/3 cun.

El método dice: duplica el largo superior y sumar el largo inferior a este resultado; duplica el largo inferior y sumar el largo superior a este resultado; multiplicar respectivamente estos resultados por el largo que le corresponde; sumar y multiplicar esto por la altura o la profundidad y dividir todo por 6.

Este problema se resuelve aplicando la fórmula (12). Hay que tener en cuenta que en el procedimiento de resolución un largo es la media entre la circunferencia interior y exterior. Así, en el problema 5.20 el largo superior es $(20 + 40)/2 = 30\ chi$ y el largo inferior es $(14 + 24)/2 = 19\ chi$.

$$V_{Duela} = \frac{1}{6}\{[2 \cdot 30 + 19]10 + [2 \cdot 19 + 30]5\}10 = 1.883\frac{1}{3}\ chi = 1.883\ chi\ 3\frac{1}{3}\ cun.$$

Problema 5.28: Supón que hay un cilindro de 1 zhang 3 chi 3 1/3 cun de altura y de 2000 hu de contenido de grano descascarillado. Encuentra la circunferencia.

Respuesta: 5 zhang 4 chi.

El método dice: Utiliza los chi de volumen de grado descascarillado. Multiplica esto por 12, divide por la altura; la raíz cuadrada del resultado da la circunferencia.

Este problema se resuelve aplicando la inversa de la fórmula (8):

$$l = \sqrt{\frac{12V_{Cilindro}}{h}},$$

al volumen de grano en *chi*, que se obtiene multiplicando el volumen en *hu* por 1 *chi* 6 1/5 *cun* (véase comentarios al problema 5.25). Así, 2000 *hu* son 3240 *chi* (2000·1,62) y la altura es $13\frac{1}{3} = 40/3$ *chi*. La longitud se obtiene como,

$$l = \sqrt{\frac{12 \cdot 3240}{40/3}} = 54\ chi = 5\ zhang\ 4\ chi.$$

Bibliografía

Chemla, K, y Shuchun, G. (2004), *Les Neuf Chapitres. Le Classique Mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*, Dunod, París.

Martzloff, JC. (2006), *A History of Chinese Mathematics*, Springer-Verlag, Berlín.

Yong, L. L. (1994), *Jiu zhang suanshu (nine chapters on the mathematical art): An overview*, Archive for History of Exact Sciences, vol 47(1), 1–51.

Needham, J. y Ling, W. (2005), *Science and Civilisation in China*, Mathematics and the sciences of the heavens and the earth, vol 3, Cambridge University Press, Cambridge.

Cullen, C. (2006), *Astronomy and Mathematics in Ancient China: the Zhou bi suan jing*, Cambridge University Press, New York.

Brandenburg, R. y Nevenzeel, K. (2007), *The Nine Chapters on the History of Chinese Mathematics*, Disponible *online* en la página personal de Nevenzeel (http://www.astro.rug.nl/~nevenzeel/). Descargado en febrero 2015.

Kangshen, S., Crossley, J. N. y Lu, A. (1999), *The Nine Chapters on the Mathematical Art. Companion and Commentary*, Oxford University Press, Beijing.